CÁLCULO FINANCEIRO

Capítulo I – Regime de capitalização em que o juro capitaliza

1

CAPITALIZAÇÃO

Avançar no tempo

O juro **capitaliza**
(**gera** juros)

2

Regime de juro composto (RJC)

Este é o regime de capitalização principal do cálculo financeiro. Nele, o **juro que vai sendo gerado em cada período de capitalização** vai ser **adicionado ao capital inicial de cada período**, gerando um **capital inicial do período seguinte**, que irá ser a nova base para o cálculo do juro periódico seguinte.

Isto é, neste regime de capitalização os **juros vão gerar juros**, conjuntamente com o capital inicial.

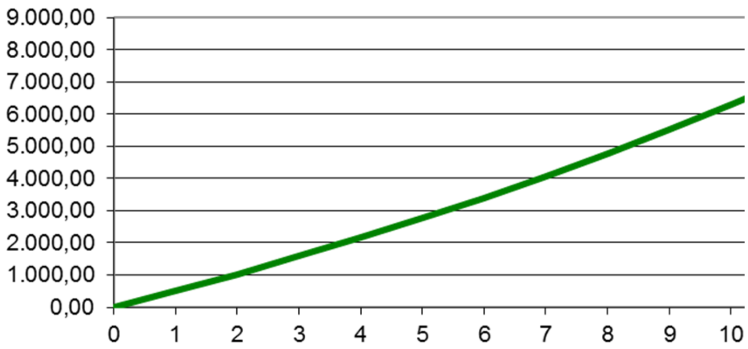
Regime de juro composto (RJC)

Período	Capital inicial do período	Juro periódico	Juro acumulado	Capital final do período
1	10.000,00	500,00	500,00	10.500,00
2	10.500,00	525,00	1.025,00	11.025,00
3	11.025,00	551,25	1.576,25	11.576,25
4	11.576,25	578,81	2.155,06	12.155,06
5	12.155,06	607,75	2.762,82	12.762,82
6	12.762,82	638,14	3.400,96	13.400,96
7	13.400,96	670,05	4.071,00	14.071,00
8	14.071,00	703,55	4.774,55	14.774,55
9	14.774,55	738,73	5.513,28	15.513,28
10	15.513,28	775,66	6.288,95	16.288,95
...	…	…	…	…

$i = 5\%$

Regime de juro composto (RJC)

Juro acumulado (cresce mais do que proporcionalmente)

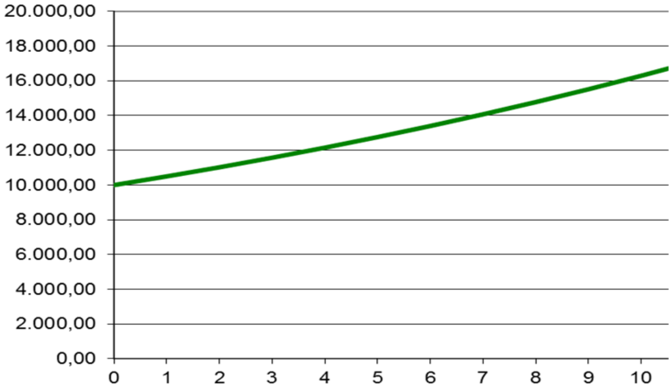


$i = 5\%$

5

Regime de juro composto (RJC)

Capital acumulado (cresce mais do que proporcionalmente)



$i = 5\%$

6

Período da taxa de juro e frequência de capitalização

No regime de juro composto **não basta** saber qual é o **período a que se refere uma taxa de juro** (anual, mensal, …), como acontece nos regimes em que o juro não capitaliza.

É necessário também conhecer **sempre** a **frequência de capitalização** dessa taxa de juro, pois ambos períodos podem ser distintos.

Assincronismo do período da taxa de juro e frequência de capitalização

Em RJC, uma taxa de juro tem, assim, dois períodos inerentes: o de **referência da taxa** e o da **frequência de capitalização**.

Exemplo:

Taxa de juro nominal **anual** de 10%, com capitalizações **semestrais**

Taxas nominais e taxas efetivas

Todas as taxas em RJC dizem-se nominais (remetem para o período da taxa).

Estas taxas, contudo, **não incorporam** o efeito da existência de juro de juros (pelo que **não nos servem para fazer cálculos**).

Taxas nominais e taxas efetivas

Todas as taxas em RJC dizem-se nominais (remetem para o período da taxa).

Estas taxas, contudo, **não incorporam** o efeito da existência de juro de juros (pelo que **não nos servem para fazer cálculos**).

Para efetuarmos cálculos em RJC **é necessário** trabalharmos com **taxas efetivas, pois estas incorporam o efeito da existência de juro de juros**

Taxas nominais e taxas efetivas

A expressão estudada para um único período de capitalização:

$$i_k = \frac{J_k}{C_t} = \frac{\overbrace{C_{t+1} - C_t}^{k=1}}{C_t}$$

Permite obter em RJC uma **taxa de juro efetiva** para o período de tempo que medeia entre os capitais C_{t+1} e C_t.

Taxas nominais e taxas efetivas

A mesma expressão altera-se quando há mais do que um único período de capitalização:

Taxa de juro efetiva trimestral

$$i_k = \frac{J_k}{C_p} = \frac{\overbrace{C_t - C_p}^{k=t-p}}{C_p} \; e \; t > p$$

Se por exemplo *k*= 3 meses

Esta expressão permite obter em RJC uma **taxa de juro efetiva** para o período de tempo que medeia entre os capitais C_t e C_p.

Taxas nominais e taxas efetivas

Uma taxa diz-se efetiva, se (**e só se**) o **período a que respeita for igual** ao da sua **frequência de capitalização**.

Assim, a taxa de juro nominal **trimestral** de **2%**, com capitalizações **trimestrais**, **é** uma **taxa efetiva**: **é a** <u>**taxa efetiva trimestral de 2%**</u>.

Esta taxa pode ser usada em RJC, para cálculos que sejam necessários.

13

Taxas nominais e taxas efetivas

Uma taxa diz-se efetiva, se (**e só se**) o **período a que respeita for igual** ao da sua **frequência de capitalização**.

Assim, uma taxa de juro nominal **anual** de **10%**, com capitalizações **semestrais**, **não é** uma taxa efetiva.

Assim, <u>não se pode usar</u> essa taxa em RJC.

A mesma <u>tem que ser convertida</u> em taxa efetiva.

14

Conversão de taxas em RJC

Quer seja para passar de uma taxa nominal, mas não efetiva, para uma efetiva (ou vice-versa), ou para encontrar taxas efetivas para um dado período, a partir de outras taxas efetivas em períodos distintos, aplicam--se **duas ferramentas** (eventualmente de forma combinada):

- **A Regra de Três Simples (R3S);**
- **A Relação de Equivalência (REq) entre taxas efetivas.**

R3S – Proporcionalidade direta

A Regra de Três Simples (R3S)

Altera **apenas** o período da taxa, mas **nunca** o da frequência de capitalização.

R3S – Proporcionalidade direta

Exemplo 1:

Taxa de juro nominal **anual** de 10%, com capitalizações **semestrais**

$\mathbf{0,1}$ está para 12 meses
$\boldsymbol{x}$ está para 3 meses

$$x = \frac{0,1 \times 3}{12} = 0,025$$

Obteve-se:

Taxa de juro nominal **trimestral** de 2,5%, com capitalizações **semestrais**

R3S – Proporcionalidade direta

Exemplo 2:

Taxa de juro nominal **anual** de 10%, com capitalizações **semestrais**

$\mathbf{0,1}$ está para 12 meses
$\boldsymbol{x}$ está para **6** meses

$$x = \frac{0,1 \times 6}{12} = 0,05$$

Obteve-se:

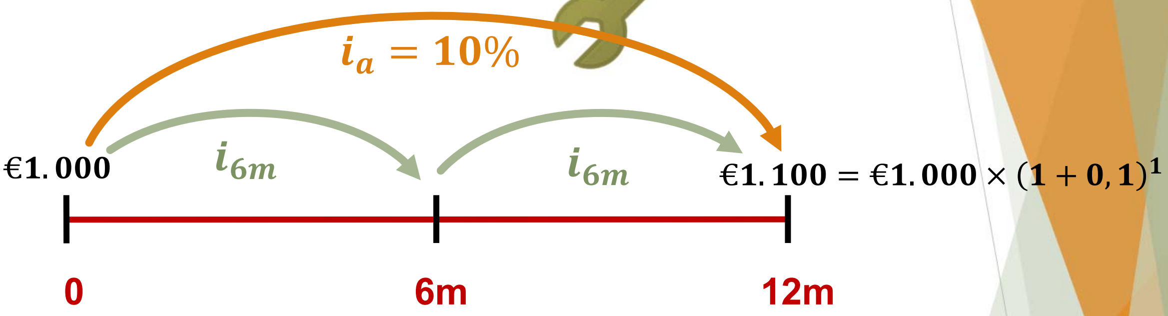
Taxa de juro nominal **semestral** de 5%, com capitalizações **semestrais**, ou **taxa de juro efetiva semestral**

Relação de equivalência

Taxa equivalente em RJC

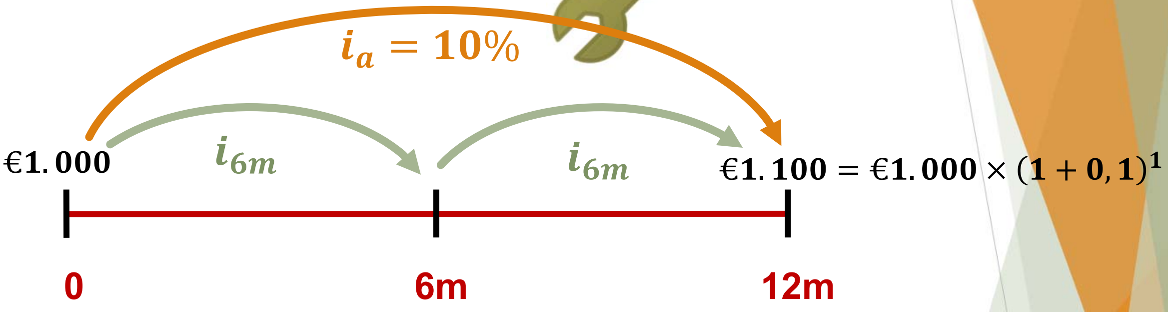
Duas taxas dizem-se equivalentes **se no mesmo período de tempo produzem o mesmo valor de juros**.

Relação de equivalência



Para uma taxa de juro **anual** efetiva de 10% (**com uma capitalização no período de um ano**), qual é a taxa **semestral** efetiva equivalente (**com duas capitalizações no período de um ano**)?

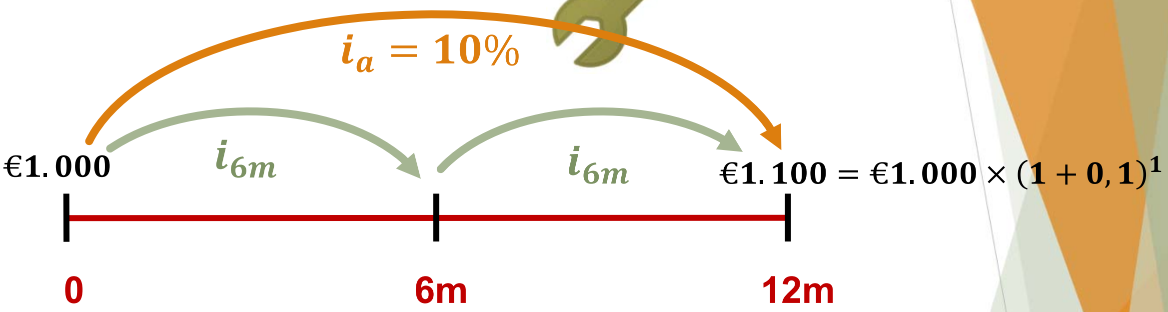
Relação de equivalência



Se são taxas de juro equivalentes, têm de produzir o **mesmo** juro no **mesmo** período de tempo (neste caso €100 num ano):

$$€1.000 \times (1 + i_{6m})^2 = €1.000 \times (1 + 0,1)^1$$

Relação de equivalência



$$€1.000 \times (1 + i_{6m})^2 = €1.000 \times (1 + 0,1)^1$$

O que implica que:

$$\underbrace{(1 + i_{6m})^2}_{\text{2 períodos de 6m}} = \underbrace{(1 + 0,1)^1}_{\text{1 período de 1 ano}} \Leftrightarrow i_{6m} = (1 + 0,1)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}0488 \ldots$$

Relação de equivalência

Genericamente, há que **garantir o mesmo tempo** e **resolver** matematicamente a expressão encontrada:

$$\underbrace{(\mathbf{1} + i_k)^{\boxed{a}}}_{\text{“a” períodos de tipo “k”}} = \underbrace{(\mathbf{1} + i_p)^{\boxed{b}}}_{\text{“b” períodos de tipo “p”}}$$

Relação de equivalência

Exemplos:

$$\underbrace{(\mathbf{1} + i_{3m})^{4}}_{\text{4 períodos de tipo “trimestral” = \textbf{12 meses}}} = \underbrace{(\mathbf{1} + i_{anual})^{1}}_{\text{1 período de tipo “anual” = \textbf{12 meses}}}$$

$$\underbrace{(\mathbf{1} + i_{6m})^{7}}_{\text{7 períodos de tipo “semestral”= \textbf{42 meses}}} = \underbrace{(\mathbf{1} + i_{7m})^{6}}_{\text{6 períodos de tipo “7 meses” = \textbf{42 meses}}}$$

Relação de equivalência

Exemplos:

$$\underbrace{(\mathbf{1}+i_{4m})^{\mathbf{1}}}_{\text{1 período de tipo “quadrimestral” = }\mathbf{4\ meses}} = \underbrace{(\mathbf{1}+i_{dia})^{\mathbf{120}}}_{\text{120 períodos de tipo “diário” = }\mathbf{4\ meses}}$$

$$\underbrace{(\mathbf{1}+i_{4m})^{\mathbf{1}}}_{\text{1 período de tipo “quadrimestral” = }\mathbf{4\ meses}} = \underbrace{(\mathbf{1}+i_{dia})^{\frac{\mathbf{365}}{\mathbf{3}}}}_{\text{365÷3 períodos de tipo “diário” = }\mathbf{4\ meses}}$$

Base 360
(ano comercial)
$\frac{\mathbf{360}}{\mathbf{12}} = \mathbf{30}$ dias/mês

Base 365
(ano civil)
$\frac{\mathbf{365}}{\mathbf{12}} = \mathbf{30},416666\ldots$ dias/mês

25

Relação de equivalência

Exemplos:

$$\underbrace{(\mathbf{1}+i_{4m})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{120}}}}_{\text{1÷120 períodos de tipo “quadrimestral” = }\mathbf{1\ dia}} = \underbrace{(\mathbf{1}+i_{dia})^{\mathbf{1}}}_{\text{1 período de tipo “diário” = }\mathbf{1\ dia}}$$

$$\underbrace{(\mathbf{1}+i_{4m})^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{365}}}}_{\text{3÷365 períodos de tipo “quadrimestral” = }\mathbf{1\ dia}} = \underbrace{(\mathbf{1}+i_{dia})^{\mathbf{1}}}_{\text{1 período de tipo “diário” = }\mathbf{1\ dia}}$$

Base 360
(ano comercial)
$\frac{\mathbf{360}}{\mathbf{12}} = \mathbf{30}$ dias/mês

Base 365
(ano civil)
$\frac{\mathbf{365}}{\mathbf{12}} = \mathbf{30},416666\ldots$ dias/mês

26

Relação de equivalência

Exemplos:

$$\underbrace{(1+i_{4m})^{3}}_{\text{3 períodos de tipo "quadrimestral" = 1 ano}} = \underbrace{(1+i_{dia})^{360}}_{\text{360 períodos de tipo "diário" = 1 ano}}$$

Base 360
(ano comercial)
$\frac{360}{12} = 30$ dias/mês

$$\underbrace{(1+i_{4m})^{3}}_{\text{3 períodos de tipo "quadrimestral" = 1 ano}} = \underbrace{(1+i_{dia})^{365}}_{\text{365 períodos de tipo "diário" = 1 ano}}$$

Base 365
(ano civil)
$\frac{365}{12} = 30,416666\ldots$ dias/mês

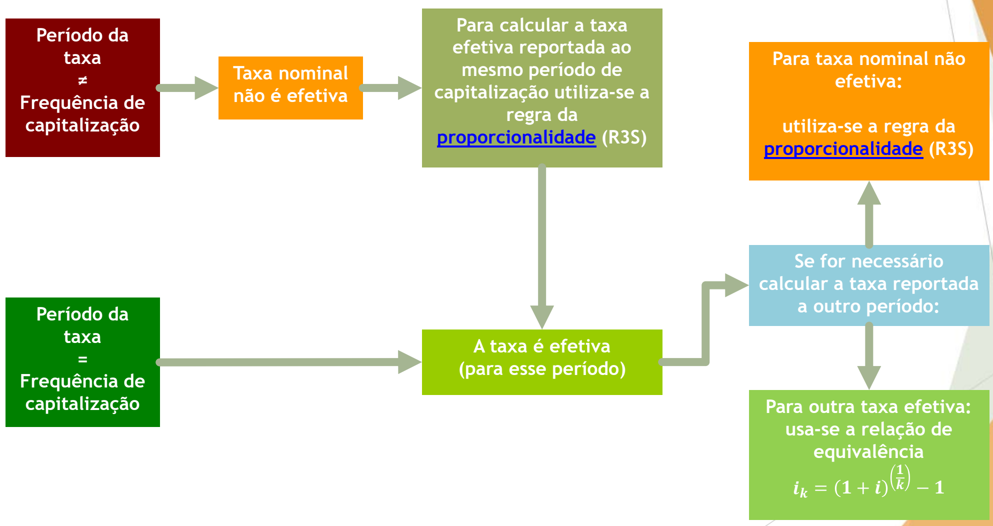
Relação da equivalência

A Relação de Equivalência (REq)

Altera **tanto** o período da taxa, **como o** da frequência de capitalização.

Exige que as taxas utilizadas na expressão sejam **efetivas**

Conversão de taxas em RJC



Regime de juro composto (RJC)

Com taxa de juro efetiva fixa

$$C_1 = C_0 + j_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0 \times (1 + i)$$

$$C_2 = C_1 + j_2 = \overbrace{C_0 \times (1 + i)}^{C_1} + \overbrace{C_1 \times i}^{j_2} =$$

$$= \overbrace{C_0 \times (1 + i)}^{C_1} + \overbrace{C_0 \times (1 + i) \times i}^{j_2} = C_0 \times (1 + i) \times (1 + i)$$

$$= C_0 \times (1 + i)^2$$

Regime de juro composto (RJC)

Com taxa de juro efetiva fixa

$$C_3 = C_2 + j_3 = \overbrace{C_0 \times (1+i)^2}^{C_2} + \overbrace{C_2 \times i}^{j_3} =$$

$$= \overbrace{C_0 \times (1+i)^2}^{C_2} + \overbrace{C_0 \times (1+i)^2 \times i}^{j_2} = C_0 \times (1+i)^3$$

…

$$\boxed{C_n = C_0 \times (1+i)^n}$$

$$\boxed{C_k = C_p \times (1+i)^{(k-p)} \wedge k > p}$$

Regime de juro composto (RJC)

Período	Capital inicial do período	Juro periódico	Juro acumulado	Capital final do período
1	10.000,00	500,00	500,00	10.500,00
2	10.500,00	525,00	1.025,00	11.025,00
3	11.025,00	551,25	1.576,25	11.576,25
4	11.576,25	578,81	2.155,06	12.155,06
5	12.155,06	607,75	2.762,82	12.762,82
6	12.762,82	638,14	3.400,96	13.400,96
7	13.400,96	670,05	4.071,00	14.071,00
8	14.071,00	703,55	4.774,55	14.774,55
9	14.774,55	738,73	5.513,28	15.513,28
10	15.513,28	775,66	6.288,95	16.288,95
…	…	…	…	…

$i = 5\%$

Regime de juro composto (RJC)

Com taxa de juro efetiva fixa

$$\boxed{C_8 = C_0 \times (1 + 0{,}05)^8 = \text{€}\mathbf{14.774,55}}$$

$$\boxed{C_9 = C_3 \times (1 + 0{,}05)^6 = \text{€}\mathbf{15.513,28}}$$

Regime de juro composto (RJC)

Período	Capital inicial do período	Juro periódico	Juro acumulado	Capital final do período
1	10.000,00	300,00	300,00	10.300,00
2	10.300,00	309,00	609,00	10.609,00
3	10.609,00	318,27	927,27	10.927,27
4	10.927,27	437,09	1.364,36	11.364,36
5	11.364,36	454,57	1.818,94	11.818,94
6	11.818,94	472,76	2.291,69	12.291,69
7	12.291,69	614,58	2.906,28	12.906,28
8	12.906,28	645,31	3.551,59	13.551,59
9	13.551,59	677,58	4.229,17	14.229,17
10	14.229,17	711,46	4.940,63	14.940,63
…	…	…	…	…

$i = 3\%$ (períodos 1–3)

$i = 4\%$ (períodos 4–6)

$i = 5\%$ (períodos 7–10)

Regime de juro composto (RJC)

Com taxas de juro efetivas variáveis

$$C_n = C_0 \times (1 + i_1)^{n_1} \times (1 + i_2)^{n_2} \times \cdots \times (1 + i_n)^{n_n}$$

$$C_8 = C_0 \times (1 + 0{,}03)^3 \times (1 + 0{,}04)^3 \times (1 + 0{,}05)^2$$

$$C_8 = C_2 \times (1 + 0{,}03)^1 \times (1 + 0{,}04)^3 \times (1 + 0{,}05)^2$$

35

DESCONTO

Descontar é recuar capitais no tempo

O juro **capitaliza**
(**gera** juros)

36

Taxas efetivas de juro e de desconto

A relação entre as taxas efetivas de juro e de desconto, estabelecida com único período de capitalização, **permanece válida** com vários períodos de capitalização

$$i_k = (1 + i_k) \times i_{d_k}$$

$$\boxed{i_k = \frac{i_{d_k}}{1 - i_{d_k}}} \qquad \boxed{i_{d_k} = \frac{i_k}{1 + i_k}}$$

Desconto composto

As **taxas efetivas de desconto aplicam-se ao capital final** e não ao inicial (como acontece com as taxas efetivas de juro)

Desconto composto
com taxas efetivas de desconto

Desconto composto com taxa efetiva de desconto

No desconto composto utilizam-se taxas efetivas de desconto, que podem ser obtidas pela expressão:

$$\boxed{i_{d_k} = \frac{D_k}{C_t} = \frac{\overbrace{C_t - C_p}^{k}}{C_t}}$$

Taxa de desconto efetiva trimestral

Se por exemplo *k*= 3 meses

Desconto composto com taxa efetiva de desconto

Com taxa de desconto efetiva fixa

$$\boxed{C_0 = C_n \times (1 - i_d)^n}$$

$$\boxed{C_p = C_k \times (1 - i_d)^{(k-p)} \wedge k > p}$$

Com taxas de desconto efetivas variáveis

$$\boxed{C_0 = C_n \times \left(1 - i_{d_1}\right)^{n_1} \times \left(1 - i_{d_2}\right)^{n_2} \times \cdots \times \left(1 - i_{d_n}\right)^{n_n}}$$

Desconto composto

com taxas efetivas de juro

Desconto composto com taxa efetiva de juro

As **taxas efetivas de JURO podem também aplicar-se ao capital final**.

Na prática, esta modalidade de desconto composto corresponde à **operação inversa** da capitalização em **RJC**

Desconto composto com taxa efetiva de juro

Com taxa de juro efetiva fixa

$$\boxed{C_0 = C_n \times (1+i)^{-n}}$$

$$\boxed{C_p = C_k \times (1+i)^{-(k-p)} \wedge k > p}$$

Com taxas de juro efetivas variáveis

$$\boxed{C_0 = C_n \times (1+i_1)^{-n_1} \times (1+i_2)^{-n_2} \times \cdots \times (1+i_n)^{-n_n}}$$

Regime de juro composto (RJC)

Período	Capital inicial do período	Juro periódico	Juro acumulado	Capital final do período
1	10.000,00	500,00	500,00	10.500,00
2	10.500,00	525,00	1.025,00	11.025,00
3	11.025,00	551,25	1.576,25	11.576,25
4	11.576,25	578,81	2.155,06	12.155,06
5	12.155,06	607,75	2.762,82	12.762,82
6	12.762,82	638,14	3.400,96	13.400,96
7	13.400,96	670,05	4.071,00	14.071,00
8	14.071,00	703,55	4.774,55	14.774,55
9	14.774,55	738,73	5.513,28	15.513,28
10	15.513,28	775,66	6.288,95	16.288,95
...	...	...	...	...

$i = 5\%$

45

Regime de juro composto (RJC)

Período	Capital inicial do período	Juro periódico	Juro acumulado	Capital final do período
1	10.000,00	300,00	300,00	10.300,00
2	10.300,00	309,00	609,00	10.609,00
3	10.609,00	318,27	927,27	10.927,27
4	10.927,27	437,09	1.364,36	11.364,36
5	11.364,36	454,57	1.818,94	11.818,94
6	11.818,94	472,76	2.291,69	12.291,69
7	12.291,69	614,58	2.906,28	12.906,28
8	12.906,28	645,31	3.551,59	13.551,59
9	13.551,59	677,58	4.229,17	14.229,17
10	14.229,17	711,46	4.940,63	14.940,63
...	...	...	...	...

$i = 3\%$

$i = 4\%$

$i = 5\%$

46

Regime de juro composto (RJC)

Com taxas de juro efetivas variáveis

$$C_0 = C_n \times (1 + i_1)^{-n_1} \times (1 + i_2)^{-n_2} \times \cdots \times (1 + i_n)^{-n_n}$$

$$C_4 = C_{10} \times (1 + 0{,}05)^{-4} \times (1 + 0{,}04)^{-2}$$

$$C_0 = C_8 \times (1 + 0{,}05)^{-2} \times (1 + 0{,}04)^{-3} \times (1 + 0{,}03)^{-3}$$

47

Exemplo de cálculo e interligação de regimes de juro

48