

# CÁLCULO FINANCEIRO

Capítulo II - Rendas financeiras

1

## Enquadramento

- Regime de Juro Composto
- Sabe-se que utilizando o fator de **atualização**  $(1+i)^{-n}$  ou o de **capitalização**  $(1+i)^n$  é possível movimentar no tempo um capital de cada vez.

2

## Conceito de renda

- Conjunto de capitais (termos) que ocorrem em intervalos de tempo iguais (equidistância temporal).
- Não interessa que os diferentes capitais (os termos) sejam de igual montante.
- A periodicidade da renda é definida pelo período de tempo entre dois termos consecutivos.

3

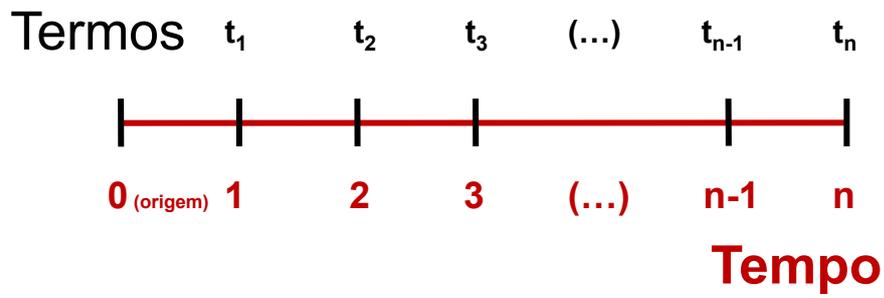
## Conceito de renda

Para definir uma renda é preciso saber:

- o momento de referência;
- o momento de vencimento do primeiro termo;
- o número de termos;
- o valor de cada termo;
- o intervalo de tempo (constante) entre os termos.

4

## Representação de uma renda



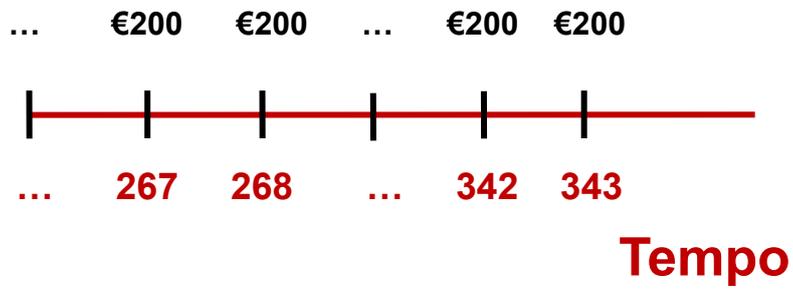
5

## Representação de uma renda



6

## Contar termos de uma renda



7

## Contar termos de uma renda

$$n = \begin{array}{l} \text{momento em} \\ \text{que ocorre o} \\ \text{último capital} \end{array} - \begin{array}{l} \text{momento em} \\ \text{que ocorre o} \\ \text{primeiro capital} \end{array} + 1$$

8

## Contar termos de uma renda

... €200 €200 ... €200 €200



... 267 268 ... 342 343

$$n = \begin{array}{l} \text{momento em} \\ \text{que ocorre o} \\ \text{último capital} \end{array} - \begin{array}{l} \text{momento em} \\ \text{que ocorre o} \\ \text{primeiro capital} \end{array} + 1$$

9

## Contar termos de uma renda

... €200 €200 ... €200 €200



... 267 268 ... 342 343

$$n = 343 - 267 + 1$$

10

## Contar termos de uma renda

... €200 €200 ... €200 €200



... 267 268 ... 342 343

$n = 77$

11

## Contar termos de uma renda

€200 €200 €200 €200 €200

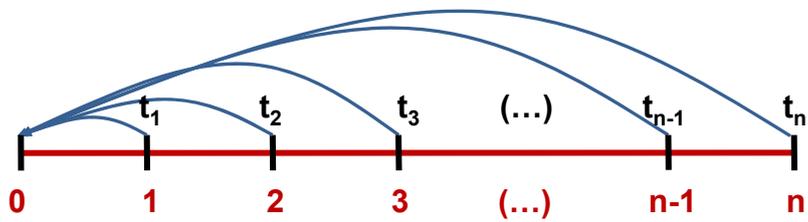


0 1 2 3 4 5

$n = 5 - 1 + 1$

12

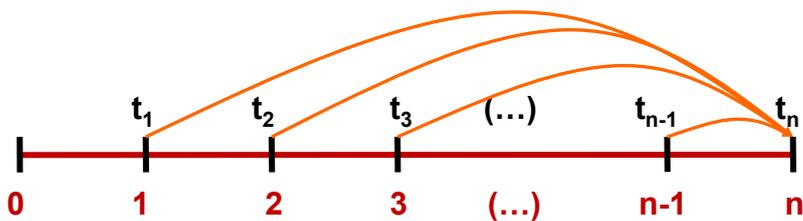
## Valor atual de uma renda



$$V_0 = t_1 \cdot (1+i)^{-1} + t_2 \cdot (1+i)^{-2} + t_3 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + t_{(n-1)} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + t_n \cdot (1+i)^{-n}$$

13

## Valor acumulado de uma renda



$$V_n = t_1 \cdot (1+i)^{(n-1)} + t_2 \cdot (1+i)^{(n-2)} + t_3 \cdot (1+i)^{(n-3)} + \dots + t_{(n-1)} \cdot (1+i) + t_n$$

$n$  é o momento em que ocorre o último termo

14

## Tipos de rendas

▶ Quanto à sua duração:

- **TEMPORÁRIAS**

O número de termos é finito.

- **PERPÉTUAS**

15

## Tipos de rendas

▶ Quanto à sua duração:

- **TEMPORÁRIAS**



- **PERPÉTUAS**



16

## Tipos de rendas

▶ Quanto ao período da renda:

- **INTEIRAS**

A periodicidade da renda corresponde ao período da taxa de juro efetiva envolvida

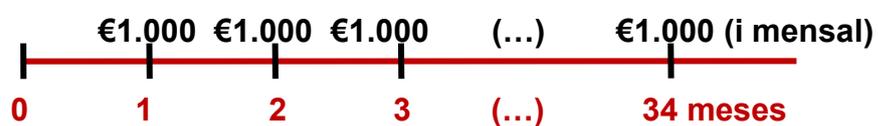
- **FRACIONADAS**

17

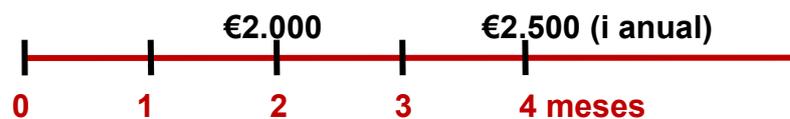
## Tipos de rendas

▶ Quanto ao período da renda:

- **INTEIRAS**



- **FRACIONADAS**



18

## Tipos de rendas

▶ Quanto ao valor dos termos:

- **CONSTANTES**

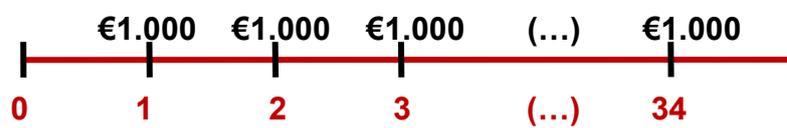
- **VARIÁVEIS**

19

## Tipos de rendas

▶ Quanto ao valor dos termos:

- **CONSTANTES**



- **VARIÁVEIS**



20

## Tipos de rendas

▶ Quanto ao momento de referência:

- **IMEDIATAS**

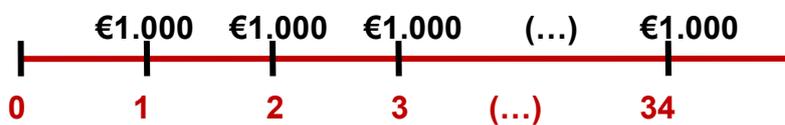
- **DIFERIDAS**

21

## Tipos de rendas

▶ Quanto ao momento de referência:

- **IMEDIATAS**



- **DIFERIDAS**



22

## Tipos de rendas

▶ Quanto ao vencimento dos termos:

- **NORMAIS (OU POSTECIPADAS)**

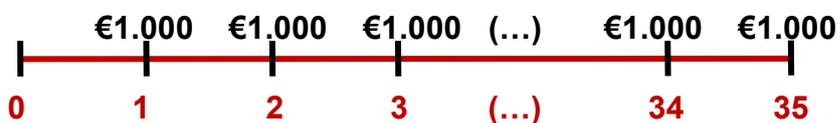
- **ANTECIPADAS**

23

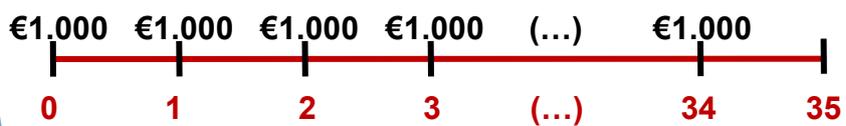
## Tipos de rendas

▶ Quanto ao vencimento dos termos:

- **NORMAIS (OU POSTECIPADAS)**



- **ANTECIPADAS**



24

## Quadro Resumo

Duração	Período	Valor dos Termos	Referência	Vencimento dos termos
Temporárias	Inteiras	Constantes	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
			Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
	Fraccionadas	Constantes	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
			Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado

25

## Quadro Resumo

Duração	Período	Valor dos Termos	Referência	Vencimento dos termos
Perpétuas	Inteiras	Constantes	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
			Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
	Fraccionadas	Constantes	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado
			Imediatas	Normal
			Diferidas	Antecipado

26

Não interessa!!!

Duração	Período	Valor dos Termos	Referência	Antecipamento dos termos	
Temporárias	Inteiras	Constantes	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
			Variáveis (PG)	Imediatas	Normal
				Diferidas	Antecipado
	Fracionadas	Constantes	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
			Variáveis (PG)	Imediatas	Normal
				Diferidas	Antecipado

Duração	Período	Valor dos Termos	Referência	Antecipamento dos termos	
Perpétuas	Inteiras	Constantes	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
			Variáveis (PG)	Imediatas	Normal
				Diferidas	Antecipado
	Fracionadas	Constantes	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
		Variáveis (PA)	Imediatas	Normal	
			Diferidas	Antecipado	
			Variáveis (PG)	Imediatas	Normal
				Diferidas	Antecipado

27

Só nos interessa saber se:

- **TEMPORÁRIAS** ou **PERPÉTUAS**
- **CONSTANTES** ou **VARIÁVEIS**
- **INTEIRAS**
  - basta converter a taxa das fracionadas
- **IMEDIATAS** e de **TERMOS NORMAIS**
  - ▶ basta atualizar/capitalizar através de  $(1+i)^{-n}/(1+i)^n$

28

# RENDAS TEMPORÁRIAS

Termos constantes

29

## Valor atual

$$V_0 = t_1 \cdot (1+i)^{-1} + t_2 \cdot (1+i)^{-2} + t_3 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + t_{(n-1)} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + t_n \cdot (1+i)^{-n}$$

mas como  $t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_{n-1} = t_n = "t"$ , vem que:

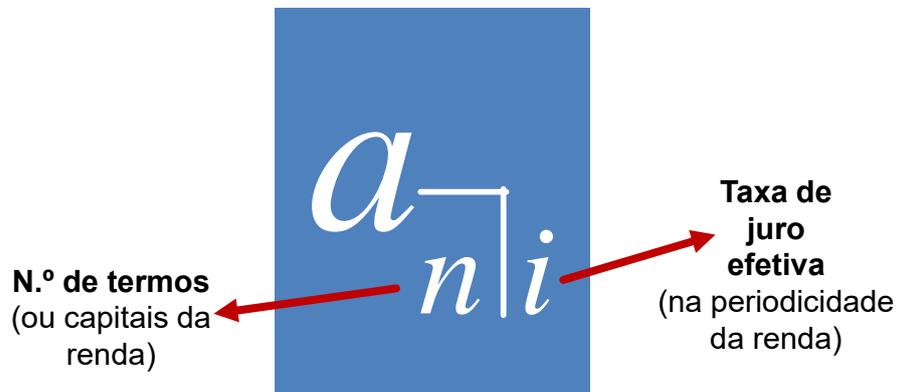
$$V_n = t \times \underbrace{\left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]}$$

$a_{\overline{n}|i}$

$A_{\overline{n}|i}$

30

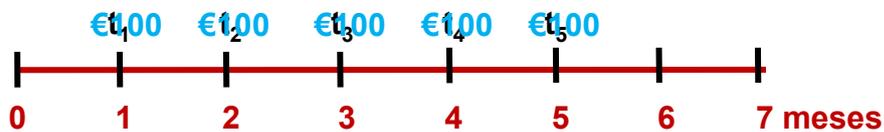
## Valor atual



31

## Valor atual: renda constante

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

OU

Qual é o capital equivalente no momento 0?

32

## Valor atual: renda constante

1) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

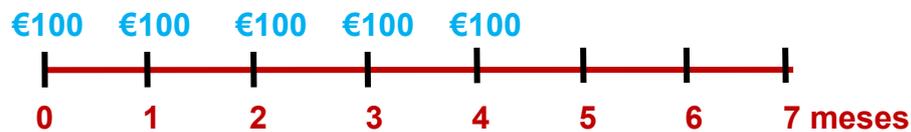
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

33

## Valor atual: renda constante

2) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

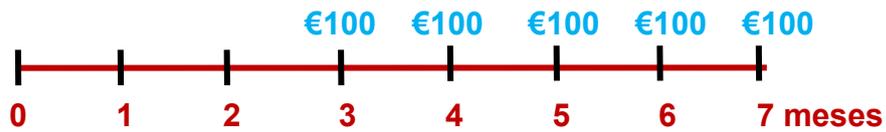
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

34

## Valor atual: renda constante

3) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

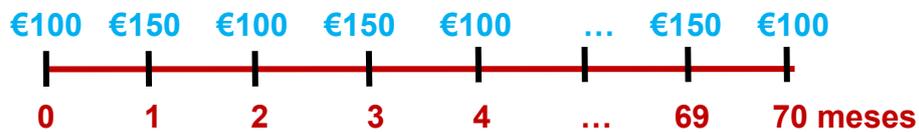
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

35

## Valor atual: renda constante

4) Considere uma taxa efetiva mensal de 2%



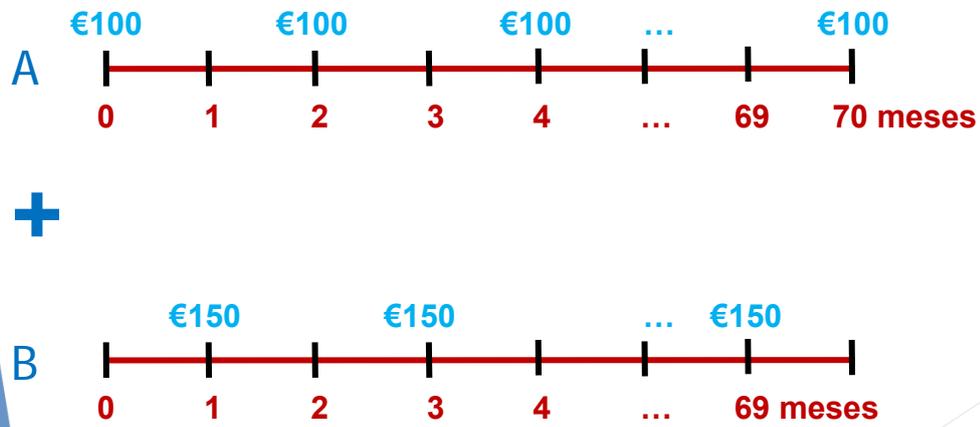
Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

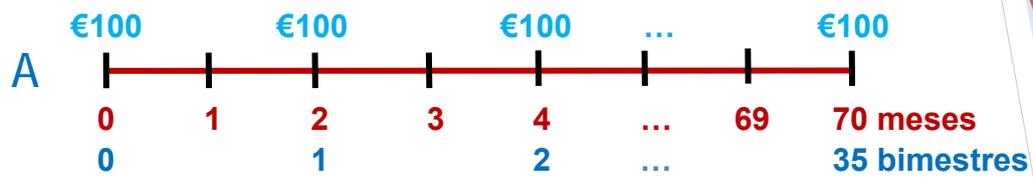
36

## Valor atual: renda constante



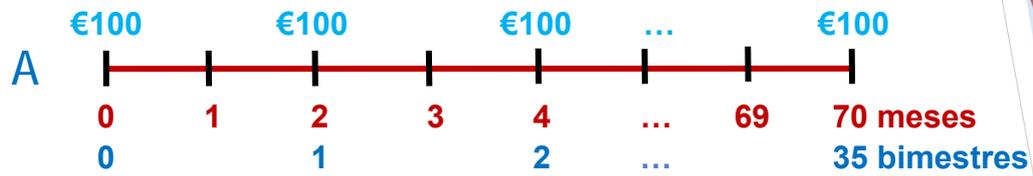
37

## Valor atual: renda constante



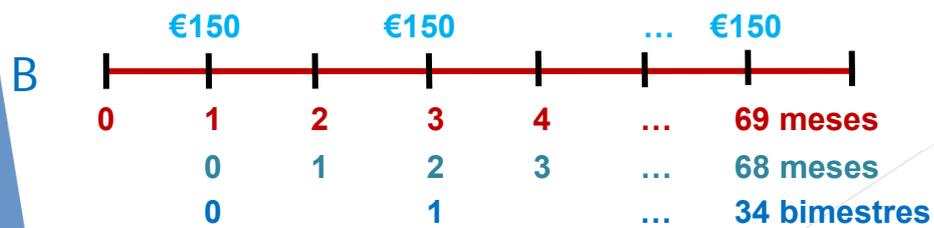
38

## Valor atual: renda constante



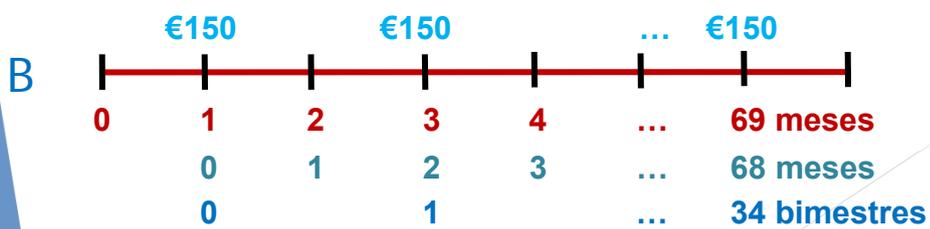
39

## Valor atual: renda constante



40

## Valor atual: renda constante



41

## Valor atual: renda constante

A  $V_0^A = €1.956,367291$

+

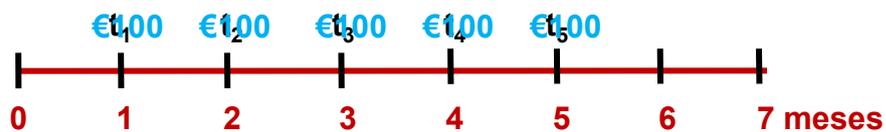
B  $V_0^B = €2.840,241957$

$V_0 = €4.796,609248$

42

## Valor acumulado: renda constante

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor acumulado da renda no momento 5?  
ou  
Qual é o capital equivalente no final do prazo?

43

## Valor acumulado: rendas constantes

Como  $V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$  vem que:

$$V_n = t \times \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \times (1+i)^n$$

$S_{\overline{n}|i}$

44

## Valor acumulado: rendas constantes

Como  $V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$  vem que:

$$V_n = t \times \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$\underbrace{\left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]}_{S_{\overline{n}|i}}$$

45

## Valor acumulado: renda constante

1) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor acumulado da renda no momento 5?

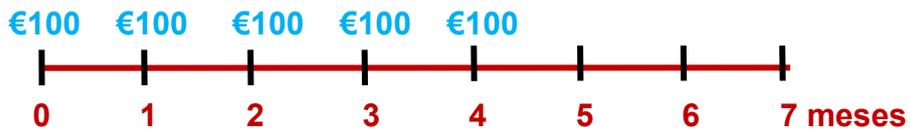
ou

Qual é o capital equivalente no final do prazo?

46

## Valor acumulado: renda constante

2) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%

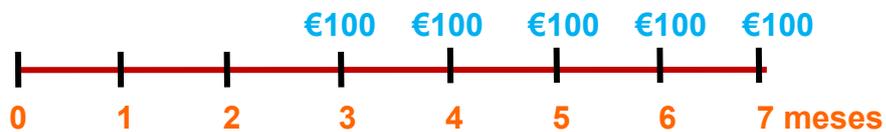


Qual é o valor acumulado da renda no momento 4?  
ou  
Qual é o capital equivalente no final do prazo?

47

## Valor acumulado: renda constante

3) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%

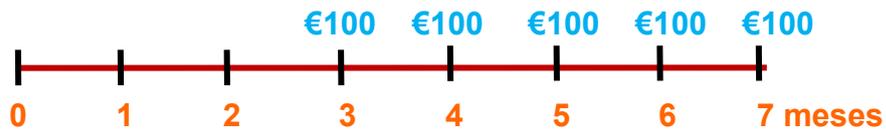


Qual é o valor acumulado da renda no momento 7?  
ou  
Qual é o capital equivalente no final do prazo?

48

## Valor acumulado: renda constante

3) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor acumulado da renda no momento 7?  
ou  
Qual é o capital equivalente no final do prazo?

49

## Valor acumulado: renda constante

4) Considere uma taxa efetiva mensal de 2%



Qual é o valor acumulado da renda no momento 70?  
ou  
Qual é o capital equivalente no final do prazo?

50

# RENDAS TEMPORÁRIAS

## Variáveis

51

## Rendas temporárias

- **TERMOS VARIÁVEIS**
  - Sem regularidade matemática dos termos;
  - Com termos em progressão aritmética;
  - Com termos em progressão geométrica.

52

# RENDAS TEMPORÁRIAS

Sem regularidade  
matemática

53

## Termos sem regularidade

- ▶ Efetua-se o cálculo (atualizar/capitalizar) termo a termo para a data de análise!



54

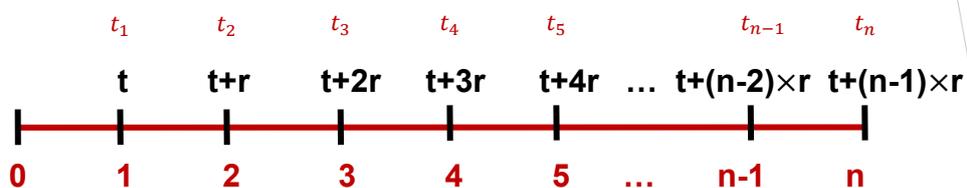
# RENDAS TEMPORÁRIAS

Em progressão  
aritmética

55

## TERMOS EM P. ARITMÉTICA

$r$  é a **RAZÃO** da progressão aritmética

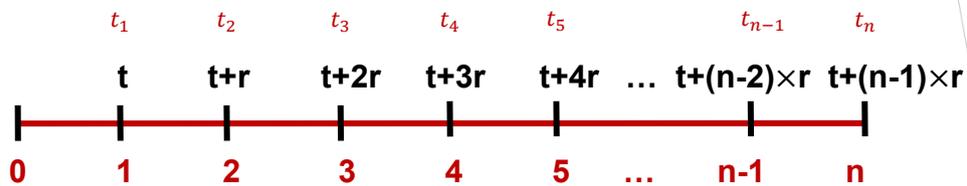


A **RAZÃO** tanto pode ser maior que 0 ou menor que 0.  
Se  $r < 0$ , então o n.º de termos possíveis é  $n = t \div |r|$

(é óbvio que quando a razão é zero os termos são constantes...)

56

## TERMOS EM P. ARITMÉTICA



A **RAZÃO** é dada pela diferença constantes de 2 termos consecutivos:

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = \dots = t_n - t_{n-1} = r$$

57

## Valor atual com termos em PA

$$V_0 = t \cdot (1+i)^{-1} + (t+r) \cdot (1+i)^{-2} + (t+2r) \cdot (1+i)^{-3} + \dots + [t+(n-2)r] \cdot (1+i)^{-(n-1)} + [t+(n-1)r] \cdot (1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \times \left( t_1 + \frac{r}{i} + n \times r \right) - \frac{n \times r}{i}$$

$a_{\overline{n}|i}$

$(a) A_{\overline{n}|i}$

58

## Valor atual com termos em PA

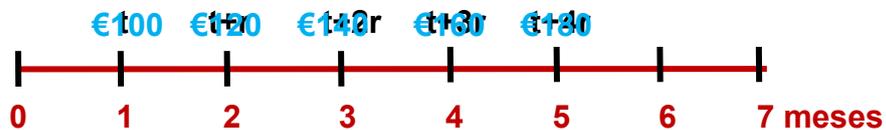
$$V_0 = t.(1+i)^{-1} + (t+r).(1+i)^{-2} + (t+2.r).(1+i)^{-3} + \dots + [t+(n-2).r].(1+i)^{-(n-1)} + [t+(n-1).r].(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \left[ a_{\overline{n}|i} \times \left( t_1 + \frac{r}{i} + n \times r \right) - \frac{n \times r}{i} \right]$$

59

## Valor atual com termos em PA

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

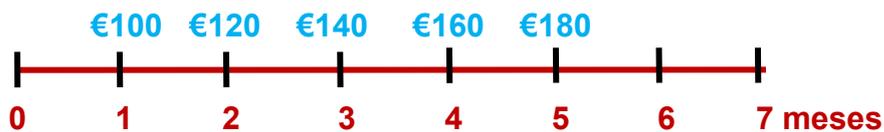
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

60

## Valor atual com termos em PA

1) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

61

## Valor atual com termos em PA

Determinar o valor de um termo qualquer em PA:



$$T_k = T_p + r \times (k - p)$$

$$T_{75} = T_3 + r \times (75 - 3)$$

$$T_{75} = €140 + €20 \times (75 - 3) = €1.580$$

62

## Valor atual com termos em PA

Determinar o valor de um termo qualquer em PA:



$$T_k = T_p + r \times (k - p)$$

$$T_3 = T_{75} + r \times (3 - 75)$$

$$T_3 = €1.580 + €20 \times (3 - 75) = €140$$

63

## Valor atual com termos em PA

2) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

64

## Valor atual com termos em PA

2) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

65

## Valor atual com termos em PA

3) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

66

## Valor atual com termos em PA

4) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

67

## Valor acumulado em PA

Como  $V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$  vem que:

$$V_n = {}_{(a)}S_{\overline{n}|i} = {}_{(a)}A_{\overline{n}|i} \times (1+i)^n$$

68

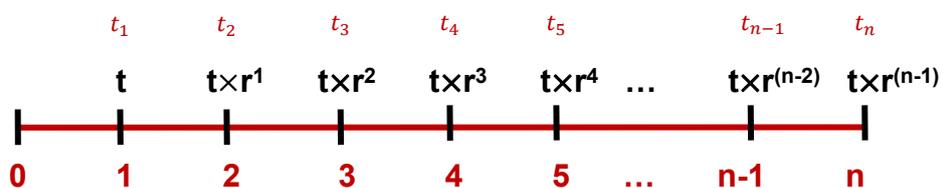
# RENDAS TEMPORÁRIAS

Em progressão  
geométrica

69

## Termos em progressão geométrica

$r$  é a **RAZÃO** da progressão geométrica



A **RAZÃO** é dada pelo quociente constante de 2 termos consecutivos:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \frac{t_5}{t_4} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

70

## Valor atual com termos em PG

$$V_0 = t \times (1+i)^{-1} + t \times r \times (1+i)^{-2} + t \times r^2 \times (1+i)^{-3} + \dots + t \times r^{(n-2)} \times (1+i)^{-(n-1)} + t \times r^{(n-1)} \times (1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \left[ \frac{t_1}{(1+i)^n} \times \frac{r^n - (1+i)^n}{r - (1+i)} \right]$$

$${}^{(g)}A_{\overline{n}|i}$$

71

## Valor atual com termos em PG

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

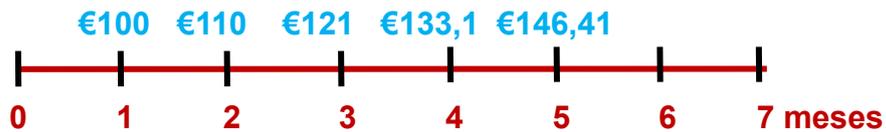
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

72

## Valor atual com termos em PG

1) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

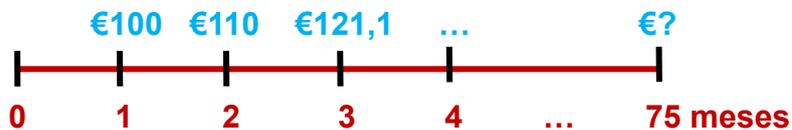
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

73

## Valor atual com termos em PG

Determinar o valor de um termo qualquer em PG:



$$T_k = T_p \times r^{(k-p)}$$

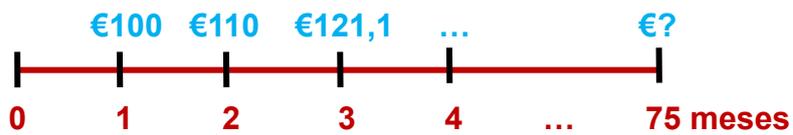
$$T_{75} = T_3 \times r^{(75-3)}$$

$$T_{75} = €121,1 \times 1,1^{(75-3)} = €115.722,4113$$

74

## Valor atual com termos em PG

Determinar o valor de um termo qualquer em PG:



$$T_k = T_p \times r^{(k-p)}$$

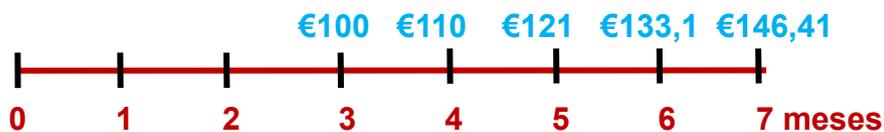
$$T_3 = T_{75} \times r^{(3-75)}$$

$$T_3 = €115.722,4113 \times 1,1^{(75-3)} = €121,1$$

75

## Valor atual com termos em PG

2) Considere uma taxa mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

76

## Valor atual com termos em PG

2) Considere uma taxa mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

77

## Valor atual com termos em PG

3) Considere uma taxa mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

78

## Valor acumulado em PG

Como  $V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$  vem que:

$$V_n = {}_{(g)}A_{\overline{n}|i} \times (1+i)^n = t \cdot \left( \frac{r^n - (1+i)^n}{r - (1+i)} \right)$$

79

## Caso particular da PG

$$r = (1 + i)$$



Considere uma taxa de 10% ao período ( $i = 0,1$ )

$$r = 1 + 0,1 = 1,1$$

$$= n \cdot t \cdot (1+i)^{-1}$$

80

# RENDAS PERPÉTUAS

Termos  
constantes

81

## RENDAS PERPÉTUAS

- Termos constantes



- 1) Calcule o valor atual do último termo:
  - 1.1) Considere uma taxa mensal de 10%
  - 1.2) Considere uma taxa mensal de 20%

82

## Valor atual: renda constante

$$V_n = t \times \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-\infty}}{i} \right]$$

Como  $(1+i)^{-\infty} \rightarrow 0$ , vem que:

83

## Valor atual: renda constante

$$V_n = t \times \left[ \frac{1}{i} \right]$$

$$\underbrace{\left[ \frac{1}{i} \right]}_{a_{\infty|i}}$$
$$\underbrace{a_{\infty|i}}_{A_{\infty|i}}$$

Não faz sentido falar de valor acumulado...

84

## Valor atual: renda constante

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

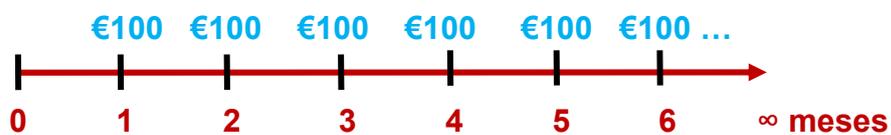
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

85

## Valor atual: renda constante

1) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

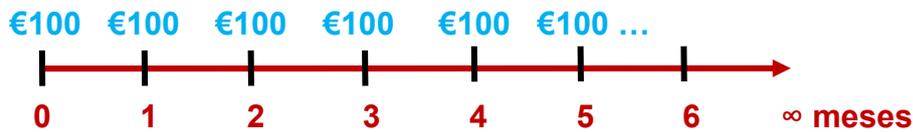
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

86

## Valor atual: renda constante

2) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

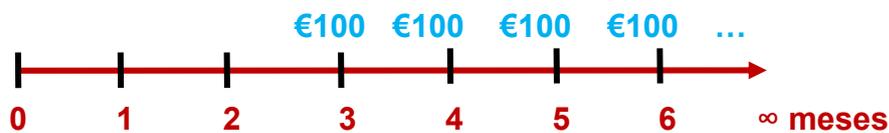
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

87

## Valor atual: renda constante

3) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

88

# RENDAS PERPÉTUAS

Termos  
variáveis

89

## Rendas perpétuas

- **TERMOS VARIÁVEIS**
  - Com termos em progressão aritmética;
  - Com termos em progressão geométrica.

90

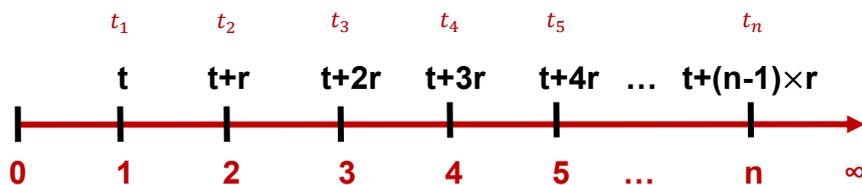
# RENDAS PERPÉTUAS

Com termos em  
progressão aritmética

91

## Termos perpétuos em PA

$r$  é a **RAZÃO** da progressão aritmética



A **RAZÃO** tanto pode ser maior que 0 ou menor que 0.  
Se  $r < 0$ , então o n.º de termos possíveis é  $n = t \div |r|$

(é óbvio que quando a razão é zero os termos são  
constantes...)

92

## Valor atual com termos perpétuos em PA

$$V_0 = \left[ \frac{1 - (1+i)^{-\infty}}{i} \right] \times \left( t_1 + \frac{r}{i} + n \times r \right) - \frac{n \times r}{i}$$

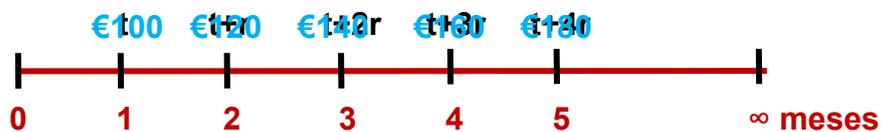
Como  $(1+i)^{-\infty} \rightarrow 0$ , vem que:

$$V_0 = \left[ \frac{1}{i} \right] \times \left( t_1 + \frac{r}{i} + n \times r \right) - \frac{n \times r}{i} = \left[ \frac{t_1}{i} + \frac{r}{i^2} \right]$$

93

## Valor atual com termos em PA

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

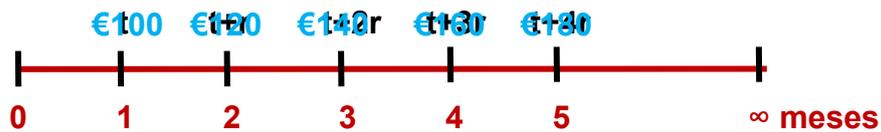
ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

94

## Valor atual com termos em PA

1) Considere uma taxa de juro efetiva anual de 26,82417946%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

95

## Valor atual com termos em PA

3) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 2%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

96

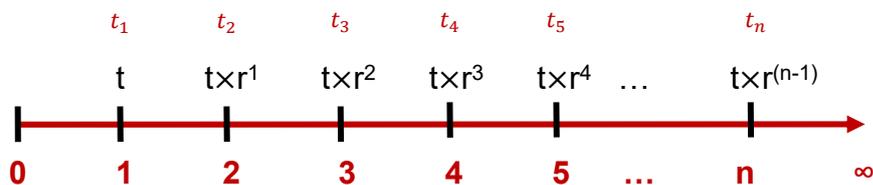
# RENDAS PERPÉTUAS

Com termos em  
progressão geométrica

97

## Termos em progressão geométrica

$r$  é a **RAZÃO** da progressão geométrica



A **RAZÃO** é dada pelo quociente constante de 2 termos consecutivos:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \frac{t_5}{t_4} = \dots = r$$

98

## Valor atual com termos em PG

$$V_0 = \left[ \frac{t_1}{(1+i)^n} \times \frac{r^n - (1+i)^n}{r - (1+i)} \right]$$

Como  $(1+i)^{-\infty} \rightarrow 0$ , vem que:

$$V_0 = \left[ \frac{t_1}{(1+i)^\infty} \times \frac{r^\infty - (1+i)^\infty}{r - (1+i)} \right]$$

$$= \left[ \frac{t_1}{(1+i) - r} \right]$$

se  $r \geq (1+i)$ , indeterminado

$(g) \overline{A}_{\infty|i}$

99

## Valor atual com termos em PG

1) Considere uma taxa de juro efetiva mensal de 12%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

100

## Valor atual com termos em PG

2) Considere uma taxa mensal de 12%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

101

## Valor atual com termos em PG

3) Considere uma taxa mensal de 12%



Qual é o valor atual da renda no momento 0?

ou

Qual é o capital equivalente no momento 0?

102