

CÁLCULO FINANCEIRO

Capítulo III – Serviço de Dívida

**Modalidades de
serviço de dívida**



1

antes de
começarmos...

Capítulo III – Serviço de dívida



2

Modalidades de serviço de dívida

- Nesta descrição iremos apresentar apenas algumas das modalidades mais comuns de serviço de dívida, uma vez que **não é possível** tratar todas as possibilidades.
- Muitas modalidades de serviço de dívida decorrem da **combinação de outras modalidades**, ao longo do tempo, de acordo com as necessidades/vontade dos clientes, bem como as exigências dos credores.

3

Modalidades de serviço de dívida

- As várias modalidades de serviço de dívida nesta apresentação **assumem um único recebimento** inicial, mas na prática isto **não tem de ser assim**, pois, como já visto em casos anteriores, podem existir empréstimos com várias cedências de capital.
- Nestas situações, **bastará** adicionar o valor desses recebimentos, ao capital em dívida no início do período em que ocorram ($CDIP_k$) no mapa de serviço de dívida.

4

Modalidades de serviço de dívida

- De referir ainda que as modalidades aqui abordadas **possuem sempre mais do que um** período de capitalização.

5

Caso 1

Pagamento de juros e
reembolso de capital **ao longo
do prazo**

6

Caso 1: Pagamento de juros e reembolso de capital ao longo do prazo

- Nesta modalidade é possível considerar **múltiplas hipóteses** quanto aos valores das parcelas de reembolso de capital e dos pagamentos de juros e também quanto às datas em que ocorrem.
- Nesta situação:

$$P_1, P_2, \dots, P_n > 0 \wedge P_k > j_k, k = 1, 2, \dots, n$$

$$j_1, j_2, \dots, j_n > 0 \text{ (o que acontece sempre!)}$$

$$m_1, m_2, \dots, m_n > 0$$

7

Caso 1: Pagamento de juros e reembolso de capital ao longo do prazo

- Todavia, é usual no mercado financeiro conjugar:
 - Os pagamentos dos juros ocorrem no seu vencimento e **coincidem** com o valor dos juros vencidos;
 - As datas dos pagamentos de juros **coincidem** com as datas em que ocorrem os reembolsos de capital;
 - Os pagamentos (que incluem as parcelas de juros e os reembolsos de capital) são **equidistantes**, **imediatos** e **normais**.

8

Relação (diferença) entre dois pagamentos consecutivos

$$P_{t+1} - P_t = j_{t+1} + m_{t+1} - (j_t + m_t)$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = C_t \times i + m_{t+1} - C_{t-1} \times i - m_t$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = (C_t - C_{t-1}) \times i + m_{t+1} - m_t$$

Como

$$C_t = C_{t-1} - m_t \Leftrightarrow C_t - C_{t-1} = -m_t$$

temos :

$$P_{t+1} - P_t = -m_t \times i + m_{t+1} - m_t$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

9

Pagamento de juros e
reembolso de capital ao
longo do prazo

Casos particulares

Capítulo III - Serviço de dívida

10

Caso 1.1

Pagamentos constantes

serviço de dívida constante

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n$$

11

Serviço de dívida constante

- Quando os pagamentos periódicos (maiores do que o juro periódico) são constantes, observa-se que as **parcelas de reembolso de capital** têm um comportamento matemático intrínseco.
- As parcelas de reembolso de capital estão em **progressão geométrica**, de **razão = $1 + i$**

12

Serviço de dívida constante

- Ou seja:

Se P_s constantes $\Leftrightarrow m_s$ em PG, com $r = 1 + i$

Se m_s em PG, com $r = 1 + i$ $\Leftrightarrow P_s$ constantes

13

Serviço de dívida constante

- Assim, podemos obter o valor de uma qualquer **parcela de reembolso** de capital a partir de **outra**:

$$P_{t+1} - P_t = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow 0 = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow m_{t+1} = m_t \times (1 + i)$$

- Ou, genericamente:

$$m_k = m_t \times (1 + i)^{k-t}$$

14

Serviço de dívida constante

- A **soma** de parcelas de reembolso de capital em PG é dada por:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

- Ou, genericamente:

$$C_{t-1} = \sum_{k=t}^n m_k = m_t \times \frac{1-r^{(n-t+1)}}{1-r}$$

n.º de parcelas de reembolso

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a t

15

Serviço de dívida constante

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital, **no serviço de dívida constante é $1+i$** :

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = m_1 \times \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

- Ou, genericamente:

$$C_{t-1} = \sum_{k=t}^n m_k = m_t \times \frac{1-(1+i)^{(n-t+1)}}{1-(1+i)}$$

n.º de parcelas de reembolso

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a t-1

16

Serviço de dívida constante

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital, no serviço de dívida constante é $1 + i$:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = m_1 \times \frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)}$$

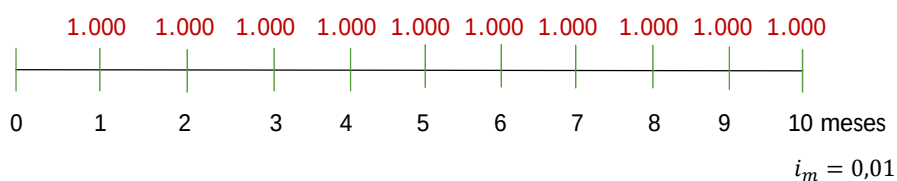
- Ou, genericamente:

$$C_8 = \sum_{k=9}^{30} m_k = m_9 \times \frac{1 - (1 + i)^{(30-9+1)}}{1 - (1 + i)}$$

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a 8

17

EXEMPLO:

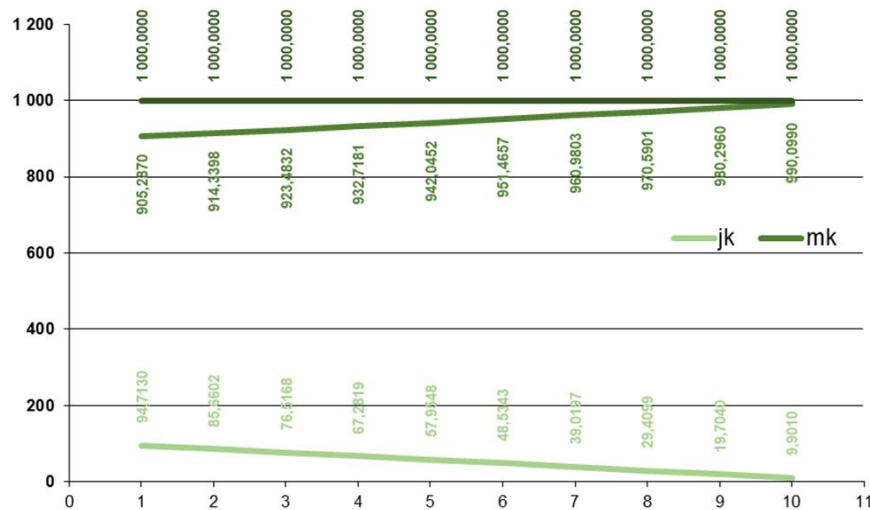


Capital em dívida logo após o 4.º pagamento?



18

EXEMPLO:



19

Caso 1.2

Parcelas de reembolso constantes

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n$$

20

Parcelas de reembolso constantes

- Quando as parcelas de reembolsos são constantes observa-se que tanto os **juros**, como os **pagamentos** têm um comportamento matemático intrínseco.
- Os juros e os pagamentos parcelas de reembolso de capital estão em **progressão aritmética**, de **razão** $= -m \times i$ (m constante)

21

Parcelas de reembolso constantes

- Ou seja:

Se m_s constantes $\Leftrightarrow j_s$ em PA, com $r = -m \times i$

Se m_s constantes $\Leftrightarrow P_s$ em PA, com $r = -m \times i$

P_s ou j_s em PA, com $r = -m \times i \Leftrightarrow m_s$ constantes

22

Parcelas de reembolso constantes

- Assim, podemos obter o valor de um qualquer **pagamento** a partir de **outro**:

$$P_{t+1} - P_t = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = m - m \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = m - m - m \times i$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = -m \times i$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} = P_t - m \times i$$

23

Parcelas de reembolso constantes

- Ou, genericamente:

$$P_k = P_t - m \times i \times (k - t)$$

- e

$$j_k = j_t - m \times i \times (k - t)$$

24

Parcelas de reembolso constantes

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital são constantes:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times n$$

- Ou, genericamente:

$$C_{t-1} = \sum_{k=t}^n m_k = m_t \times (n - t + 1)$$

n.º de parcelas que falta entregar

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a t-1

25

Parcelas de reembolso constantes

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital são constantes:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times n$$

- Ou, genericamente:

$$C_8 = \sum_{k=9}^{30} m_k = m_9 \times (30 - 9 + 1)$$

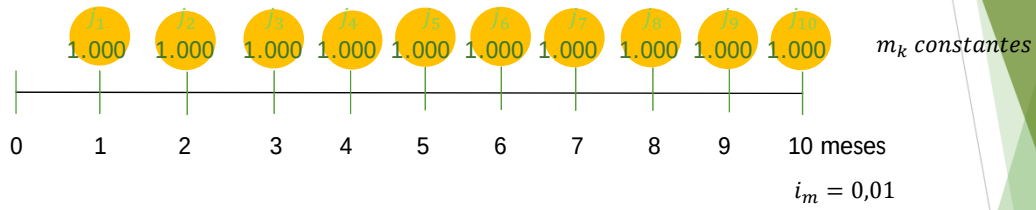
22

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a 8

26

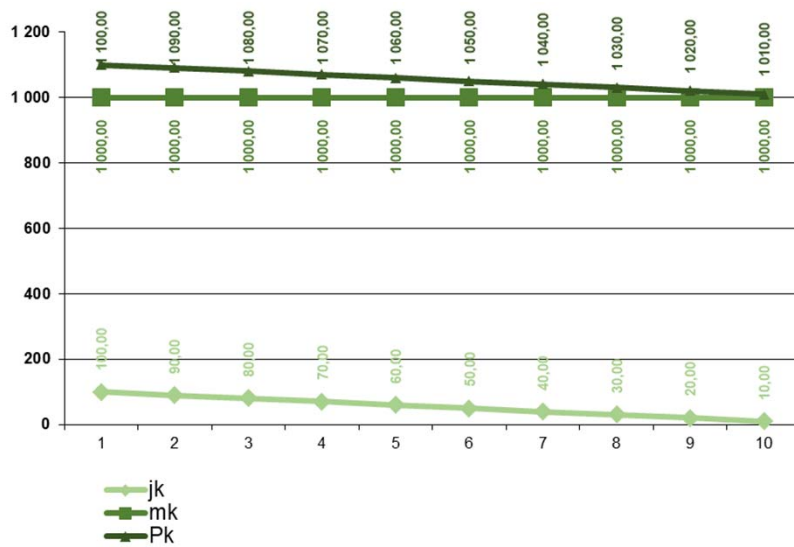
EXEMPLO:

$C_0 = €10.000$



27

EXEMPLO:



28

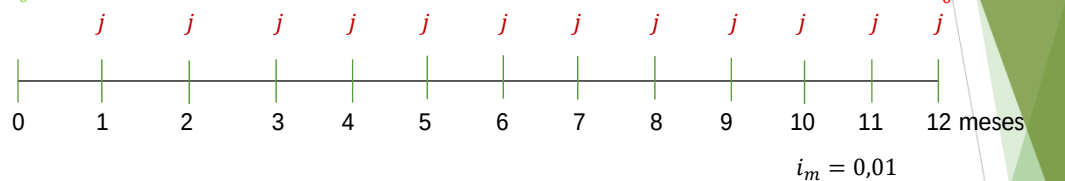
Caso 2

Reembolso de capital **no final do prazo** e pagamento de juros **ao longo do prazo**

29

EXEMPLO:

$C_0 = €10.000$



Valor do juro a entregar ao longo do tempo?

$$€10.000 = €10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} + j \times a_{\overline{12}|0,01}$$

$$\Leftrightarrow j = \frac{€10.000 - €10.000 \times (1 + 0,01)^{-12}}{a_{\overline{12}|0,01}} = €100$$



30

Caso 3

Reembolso de capital e pagamento de juros no **final do prazo** (empréstimo "clássico")

31

EXEMPLO:

$C_0 = €10.000$

$C_0 = €10.000$
 J



$i_m = 0,01$

Valor do Juro no final do prazo?

$$€10.000 = €10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} + J_{12} \times (1 + 0,01)^{-12}$$

$$\Leftrightarrow J_{12} = \frac{€10.000 - €10.000 \times (1 + 0,01)^{-12}}{(1 + 0,01)^{-12}} = €1.268,25$$



32

Caso 4

Reembolso de capital no **final do prazo** e pagamento de juros no **início do prazo**

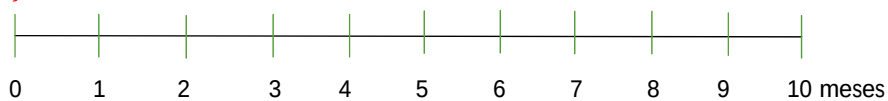
33

EXEMPLO:

$C_0 = €10.000$

J

C_0



$i_m = 0,01$

Valor do Juro no início do prazo?

$$€10.000 = €10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} + J_0$$

$$\Leftrightarrow J_0 = €10.000 - €10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} = €1.125,51$$



34

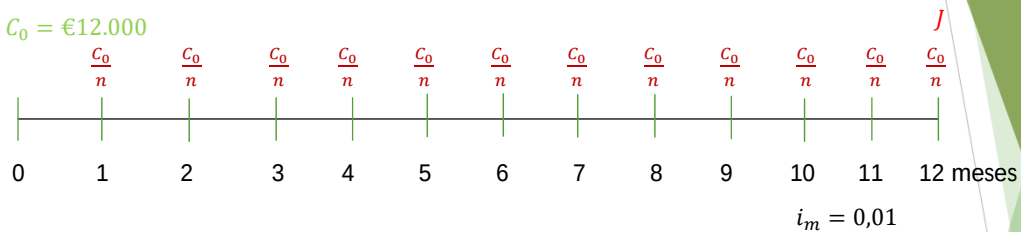
Caso 5

Reembolsos de capital **ao longo do prazo** e pagamento de juros no **final do prazo**

35

EXEMPLO:

$C_0 = €12.000$



Valor do Juro no final do prazo?

$$€12.000 = \frac{€12.000}{12} \times a_{\overline{12}|0,01} + J_n \times (1 + 0,01)^{-12}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{€12.000 - €1.000 \times a_{\overline{12}|0,01}}{(1 + 0,01)^{-12}} = €839,40$$



36

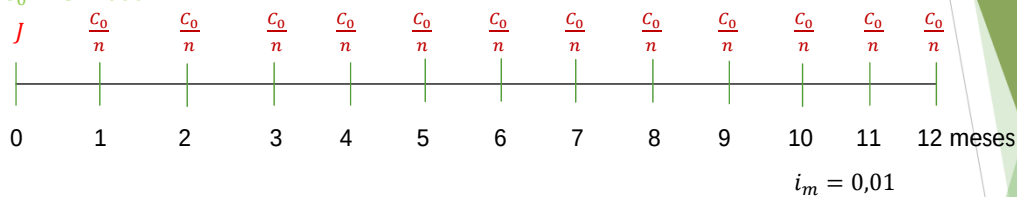
Caso 6

Reembolsos de capital **ao longo do prazo** e pagamento de juros no **início do prazo**

37

EXEMPLO:

$$C_0 = €12.000$$



Valor do Juro no início do prazo?

$$€12.000 = \frac{€12.000}{12} \times a_{\overline{12}|0,01} + J_0$$

$$\Leftrightarrow J_0 = €12.000 - €1.000 \times a_{\overline{12}|0,01} = €744,92$$



38

Aspetos práticos de:



Cálculo de capitais
em dívida



Utilização de folha
de cálculo

Capítulo III – Serviço de dívida