RENDAS POR PATAMARES (PA): GUIA DE RESOLUÇÃO EM 3 PASSOS

Situação:
Pretende-se determinar o valor atual (no momento 0) de um conjunto de capitais mensais constantes, mas com crescimento de €50,00 de 6 em 6 meses (crescimento aritmético semestral) e uma taxa de juro mensal efetiva de 1%. A representação gráfica da situação é a seguinte:

Euros		**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	10+50 **=60**	10+50 **=60**	10+50 **=60**	10+50 **=60**	10+50 **=60**	10+50 **=60**	10+2×50 **=110**	10+2×50 **=110**	10+2×50 **=110**	10+2×50 **=110**	10+2×50 **=110**	10+2×50 **=110**
	0m	1m	2m	3m	4m	5m	6m 1s	7m	8m	9m	10m	11m	12m 2s	13m	14m	15m	16m	17m	18m 3s

1.º PASSO: "Compactar" os patamares

Neste caso há que "compactar" os vários patamares constantes (na situação descrita existem 3: de €10, de €60 e de €110), recorrendo à fórmula das rendas temporárias de termos constantes. Fazendo isto obtém-se uma nova renda financeiramente equivalente à primeira, **mas com uma periodicidade correspondente ao do crescimento da razão**. Graficamente vem:

Euros	$10.a_{\overline{6}\|0,01}$	$60.a_{\overline{6}\|0,01} =$ $(10+50).a_{\overline{6}\|0,01} =$ $10.a_{\overline{6}\|0,01} + 50.a_{\overline{6}\|0,01}$	$110.a_{\overline{6}\|0,01} =$ $(10+2\times 50).a_{\overline{6}\|0,01} =$ $10.a_{\overline{6}\|0,01} + 2\times 50.a_{\overline{6}\|0,01}$	
	0m	1s	2s	3s

2.º PASSO: Verificar a existência de termos em progressão aritmética

Agora temos uma renda equivalente à primeira só que em vez de 18 termos passámos a ter apenas 3:

$$t_1 = 10.a_{\overline{6}|0,01}$$
$$t_2 = 60.a_{\overline{6}|0,01} = (10+50).a_{\overline{6}|0,01} = 10.a_{\overline{6}|0,01} + 50.a_{\overline{6}|0,01}$$
$$t_3 = 110.a_{\overline{6}|0,01} = (10+2\times 50).a_{\overline{6}|0,01} = 10.a_{\overline{6}|0,01} + 2\times 50.a_{\overline{6}|0,01}$$

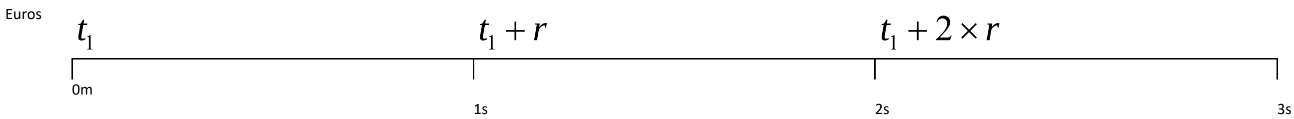
Para verificar a existência de termos em progressão aritmética basta efetuar:

$$t_2 - t_1 = \left(10.a_{\overline{6}|0,01} + 50.a_{\overline{6}|0,01}\right) - \left(10.a_{\overline{6}|0,01}\right) = 50.a_{\overline{6}|0,01}$$
$$t_3 - t_2 = \left(10.a_{\overline{6}|0,01} + 2\times 50.a_{\overline{6}|0,01}\right) - \left(10.a_{\overline{6}|0,01} + 50.a_{\overline{6}|0,01}\right) = 50.a_{\overline{6}|0,01}$$

Assim, temos que a razão da nova renda é $50.a_{\overline{6}|0,01}$.

Podemos deste modo escrever os novos termos em função do primeiro:

$$t_1$$
$$t_2 = t_1 + r$$
$$t_3 = t_2 + r = t_1 + 2 \times r$$



3.º PASSO: "Compactar" os termos em PA e calcular o valor atual

Chegados a este ponto basta atualizar os termos, recorrendo à expressão que "compacta", num único capital, termos de uma renda em PA:

$$_{(a)}A_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot \left(t + \frac{r}{i} + n.r \right) - \frac{n.r}{i}$$

neste caso:

$t = 10.a_{\overline{6}|0,01}$ (1.º termo)

$n = 3$ (n.º de termos)

$r = 50.a_{\overline{6}|0,01}$ (razão)

$i = i_{semestral}$ (é necessário calcular esta taxa uma vez que a nova renda é semestral)

$$i_{semestral} = (1 + i_{mensal})^{\frac{1}{\frac{1}{6}}} - 1 = (1 + i_{mensal})^6 - 1 = \left(1 + 0,01\right)^6 - 1 = 0,0615201506$$

$$_{(a)}A_{\overline{3}|i_{semestral}} = a_{\overline{3}|i_{semestral}} \cdot \left(10.a_{\overline{6}|0,01} + \frac{50.a_{\overline{6}|0,01}}{i_{semestral}} + 3 \times 50.a_{\overline{6}|0,01} \right) - \frac{3 \times 50.a_{\overline{6}|0,01}}{i_{semestral}}$$

Para calcularmos o valor atual da renda no momento 0 **não podemos esquecer que este valor é remetido para um período antes do primeiro termo**. Assim, o cálculo anterior remete o valor atual da renda para um semestre antes do momento 0, visto que o primeiro termo se encontra no momento 0. Para determinar o valor atual no momento 0, basta capitalizar o valor encontrado antes um semestre.

$$C_0 = \left[a_{\overline{3}|i_{semestral}} \cdot \left(10.a_{\overline{6}|0,01} + \frac{50.a_{\overline{6}|0,01}}{i_{semestral}} + 3 \times 50.a_{\overline{6}|0,01} \right) - \frac{3 \times 50.a_{\overline{6}|0,01}}{i_{semestral}} \right] \times \left(1 + i_{semestral}\right)^1$$

ou

$$C_0 = \left[a_{\overline{3}|i_{semestral}} \cdot \left(10.a_{\overline{6}|0,01} + \frac{50.a_{\overline{6}|0,01}}{i_{semestral}} + 3 \times 50.a_{\overline{6}|0,01} \right) - \frac{3 \times 50.a_{\overline{6}|0,01}}{i_{semestral}} \right] \times \left(1 + i_{mensal}\right)^6$$

Sabendo que:

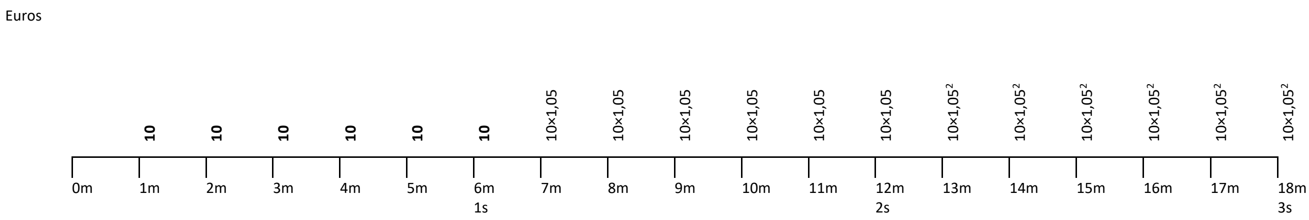
$$i_{semestral} = 0,0615201506$$
$$a_{\overline{6}|0,01} = 5,795476475$$
$$a_{\overline{3}|i_{semestral}} = 2,665511775$$

$$vem:$$
$$C_0 \approx €951,28$$

Sugestão:
Experimente refazer a situação, considerando mais termos na renda original, por exemplo 10 semestres, como forma de treino e de expansão do exemplo.

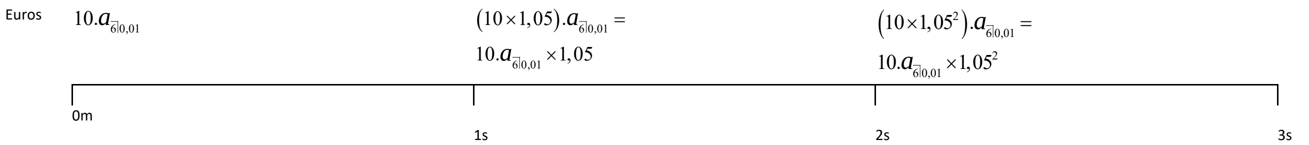
RENDAS POR PATAMARES (PG): GUIA DE RESOLUÇÃO EM 3 PASSOS

Situação:
Pretende-se determinar o valor atual (no momento 0) de um conjunto de capitais mensais constantes, mas com crescimento de 5% de 6 em 6 meses (crescimento aritmético semestral) e uma taxa de juro mensal efetiva de 1%. A representação gráfica da situação é a seguinte:



1.º PASSO: "Compactar" os patamares

Neste caso há que "compactar" os vários patamares constantes (na situação descrita existem 3: de €10, de €10×1,05 e de €10×1,05^2), recorrendo à fórmula das rendas temporárias de termos constantes. Fazendo isto obtém-se uma nova renda financeiramente equivalente à primeira, **mas com uma periodicidade correspondente ao do crescimento da razão**. Graficamente vem:



2.º PASSO: Verificar a existência de termos em progressão geométrica

Agora temos uma renda equivalente à primeira só que em vez de 18 termos passámos a ter apenas 3:

$$t_1 = 10.a_{\overline{6}|0,01}$$
$$t_2 = 10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05$$
$$t_3 = 10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05^2$$

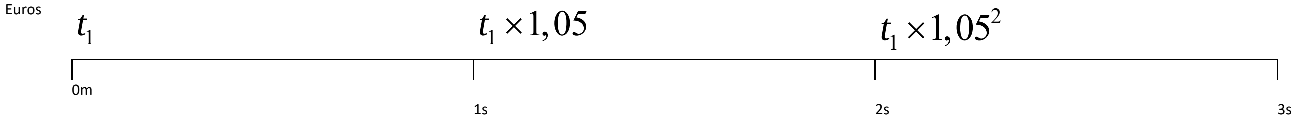
Para verificar a existência de termos em progressão geométrica basta efetuar:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05}{10.a_{\overline{6}|0,01}} = 1,05$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05^2}{10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05} = 1,05$$

Assim, temos que a razão da nova renda é 1,05.

Podemos deste modo escrever os novos termos em função do primeiro:

$$t_1 = 10.a_{\overline{6}|0,01}$$
$$t_2 = t_1 \times 1,05 = 10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05$$
$$t_3 = t_2 \times 1,05 = t_1 \times 1,05 \times 1,05 = 10.a_{\overline{6}|0,01} \times 1,05^2$$



3.º PASSO: "Compactar" os termos em PG e calcular o valor actual

Chegados a este ponto basta atualizar os termos, recorrendo à expressão que "compacta", num único capital, termos de uma renda em PG:

$${}_{(g)}A_{\overline{n}|i} = \left[\frac{t}{(1+i)^n} . \frac{r^n - (1+i)^n}{r - (1+i)} \right]$$

neste caso:

$t = 10.a_{\overline{6}|0,01}$ (1.º termo)

$n = 3$ (n.º de termos)

$r = 1,05$ (razão)

$i = i_{semestral}$ (é necessário calcular esta taxa uma vez que a nova renda é semestral)

$$i_{semestral} = (1+i_{mensal})^{\frac{1}{\frac{1}{6}}} - 1 = (1+i_{mensal})^6 - 1 = (1+0,01)^6 - 1 = 0,0615201506$$

$${}_{(g)}A_{\overline{n}|i} = \left[\frac{10.a_{\overline{6}|0,01}}{(1+i_{semestral})^3} . \frac{1,05^3 - (1+i_{semestral})^3}{1,05 - (1+i_{semestral})} \right]$$

Para calcularmos o valor atual da renda no momento 0 **não podemos esquecer que este valor é remetido para um período antes do primeiro termo**. Assim, o cálculo anterior remete o valor atual da renda para um semestre antes do momento 0, visto que o primeiro termo se encontra no momento 0. Para determinar o valor atual no momento 0, basta capitalizar o valor encontrado antes um semestre.

$$C_0 = \left[\frac{10.a_{\overline{6}|0,01}}{(1+i_{semestral})^3} . \frac{1,05^3 - (1+i_{semestral})^3}{1,05 - (1+i_{semestral})} \right] \times (1+i_{semestral})^1$$

ou

$$C_0 = \left[\frac{10.a_{\overline{6}|0,01}}{(1+i_{semestral})^3} . \frac{1,05^3 - (1+i_{semestral})^3}{1,05 - (1+i_{semestral})} \right] \times (1+i_{mensal})^6$$

Sabendo que:

$i_{semestral} = 0,0615201506$
$a_{\overline{6}|0,01} = 5,795476475$

$vem:$
$C_0 \approx €171,98$

Sugestão:
Experimente refazer a situação, considerando mais termos na renda original, por exemplo 10 semestres, como forma de treino e de expansão do exemplo.