

# CÁLCULO FINANCEIRO

Capítulo III – Serviço de Dívida

**Modalidades de  
serviço de dívida**



antes de  
começarmos...

Capítulo III – Serviço de dívida



# Modalidades de serviço de dívida

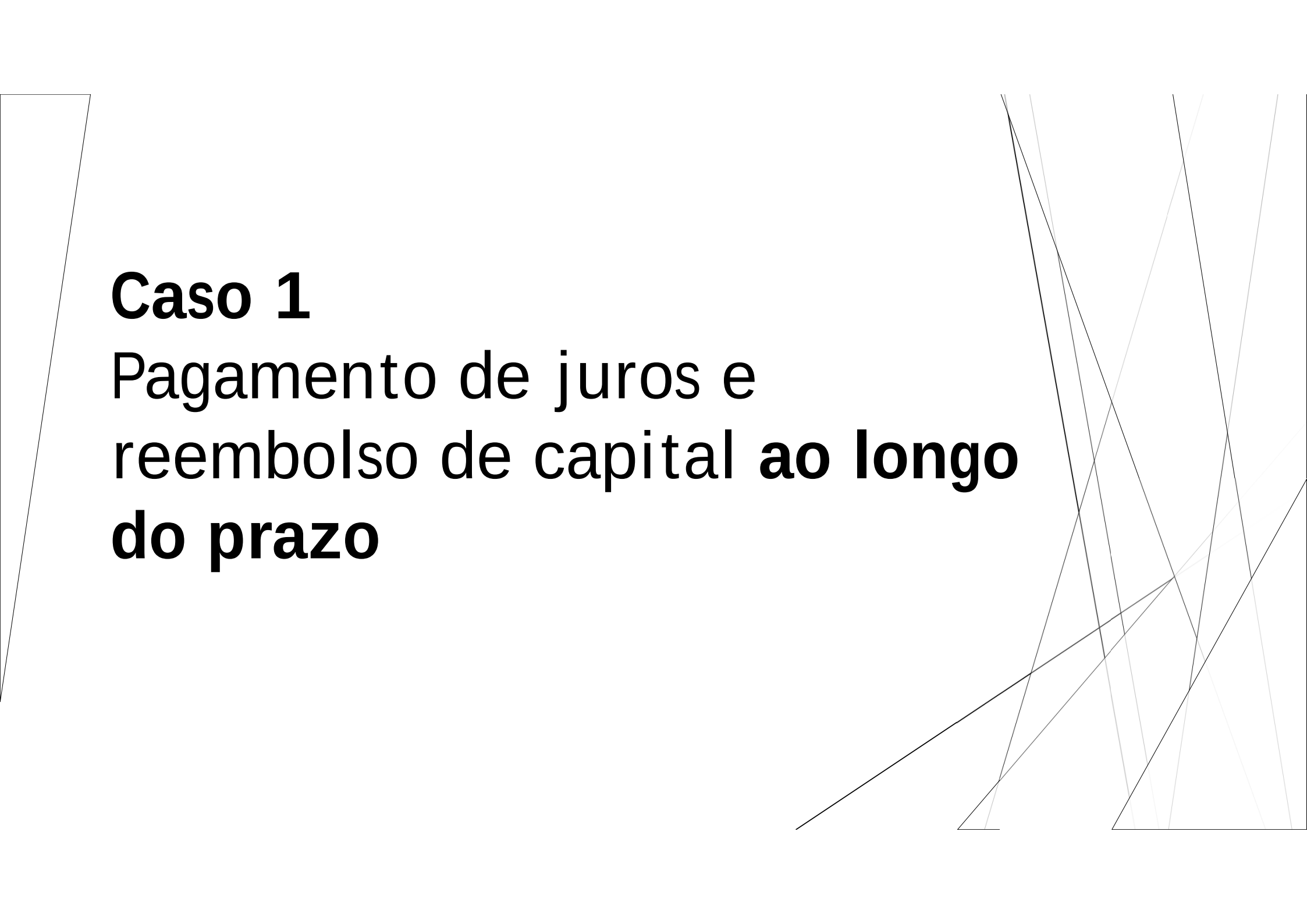
- Nesta descrição iremos apresentar apenas algumas das modalidades mais comuns de serviço de dívida, uma vez que **não é possível** tratar todas as possibilidades.
- Muitas modalidades de serviço de dívida decorrem da **combinação de outras modalidades**, ao longo do tempo, de acordo com as necessidades/vontade dos clientes, bem como as exigências dos credores.

## Modalidades de serviço de dívida

- As várias modalidades de serviço de dívida nesta apresentação **assumem um único recebimento** inicial, mas na prática isto **não tem de ser assim**, pois, como já visto em casos anteriores, podem existir empréstimos com várias cedências de capital.
- Nestas situações, **bastará** adicionar o valor desses recebimentos, ao capital em dívida no início do período em que ocorram ( $CDIP_k$ ) no mapa de serviço de dívida.

# Modalidades de serviço de dívida

- De referir ainda que as modalidades aqui abordadas **possuem sempre mais do que um** período de capitalização.

The background features several thin, light gray lines that intersect to form various geometric shapes, including triangles and polygons, creating a modern, abstract design.

# **Caso 1**

**Pagamento de juros e  
reembolso de capital ao longo  
do prazo**

## Caso 1: Pagamento de juros e reembolso de capital ao longo do prazo

- Nesta modalidade é possível considerar **múltiplas hipóteses** quanto aos valores das parcelas de reembolso de capital e dos pagamentos de juros e também quanto às datas em que ocorrem.
- Nesta situação:

$$P_1, P_2, \dots, P_n > 0 \wedge P_k > j_k, k = 1, 2, \dots, n$$

$$j_1, j_2, \dots, j_n > 0 \text{ (o que acontece sempre!)}$$

$$m_1, m_2, \dots, m_n > 0$$

## Caso 1: Pagamento de juros e reembolso de capital ao longo do prazo

- Todavia, é usual no mercado financeiro conjugar:
  - Os pagamentos dos juros ocorrem no seu vencimento e **coincidem** com o valor dos juros vencidos;
  - As datas dos pagamentos de juros **coincidem** com as datas em que ocorrem os reembolsos de capital;
  - Os pagamentos (que incluem as parcelas de juros e os reembolsos de capital) são **equidistantes, imediatos e normais**.

## Relação (diferença) entre dois pagamentos consecutivos

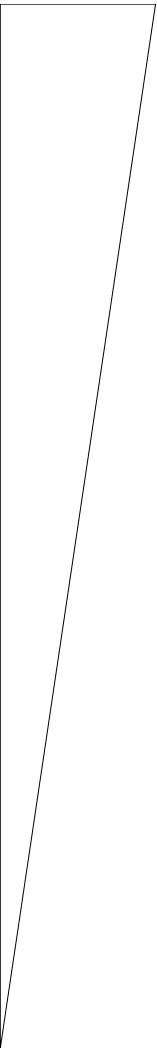
$$\begin{aligned}P_{t+1} - P_t &= j_{t+1} + m_{t+1} - (j_t + m_t) \\ \Leftrightarrow P_{t+1} - P_t &= C_t \times i + m_{t+1} - C_{t-1} \times i - m_t \\ \Leftrightarrow P_{t+1} - P_t &= (C_t - C_{t-1}) \times i + m_{t+1} - m_t\end{aligned}$$

*Como*

$$C_t = C_{t-1} - m_t \Leftrightarrow C_t - C_{t-1} = -m_t$$

*temos :*

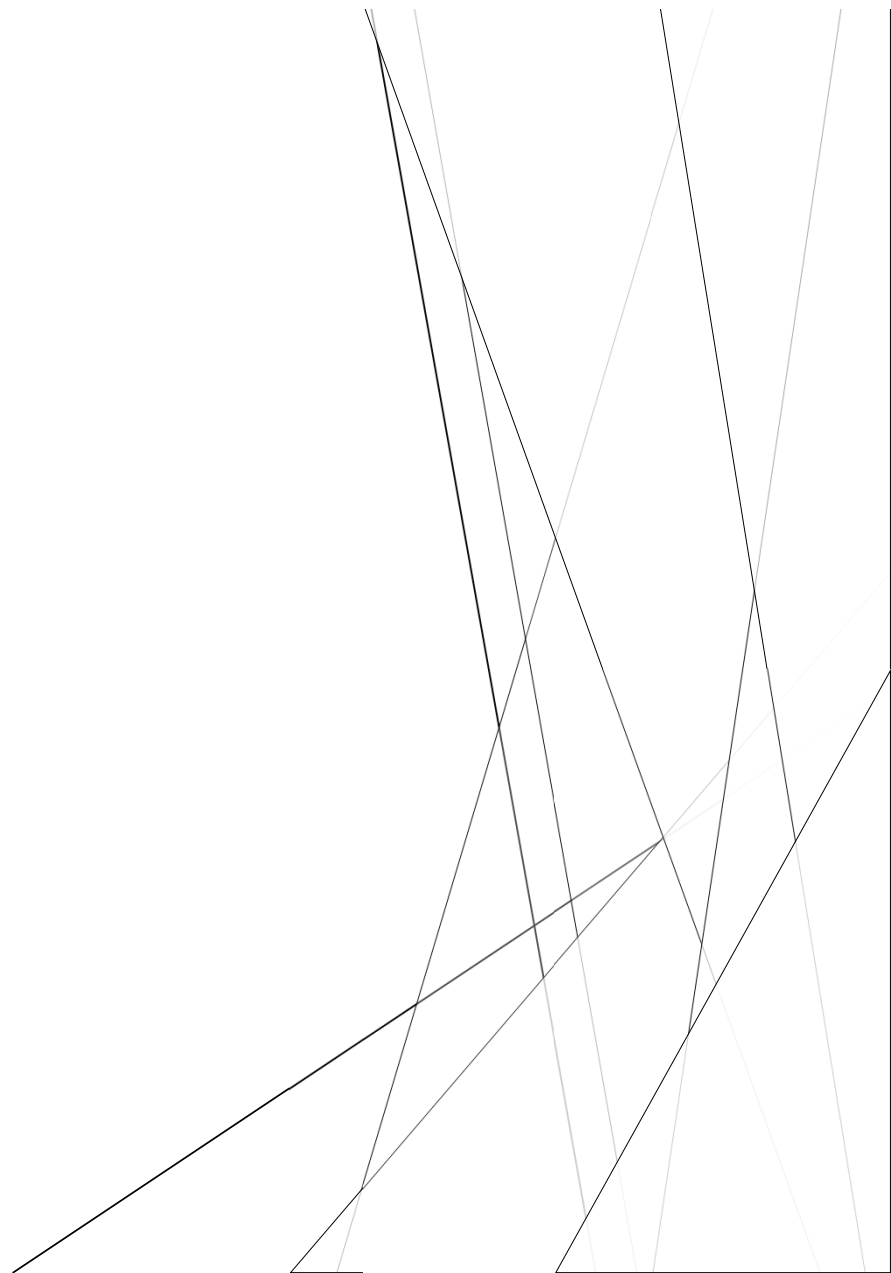
$$\begin{aligned}P_{t+1} - P_t &= -m_t \times i + m_{t+1} - m_t \\ \Leftrightarrow P_{t+1} - P_t &= m_{t+1} - m_t \times (1 + i)\end{aligned}$$



Pagamento de juros e  
reembolso de capital ao  
longo do prazo

# Casos particulares

Capítulo III – Serviço de dívida



# Caso 1.1

## Pagamentos constantes

*serviço de dívida constante*

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n$$

## Serviço de dívida constante

- Quando os pagamentos periódicos (maiores do que o juro periódico) são constantes, observa-se que as **parcelas de reembolso de capital** têm um comportamento matemático intrínseco.
- As parcelas de reembolso de capital estão em **progressão geométrica**, de **razão**  $= 1 + i$

## Serviço de dívida constante

- Ou seja:

*Se  $P_s$  constantes  $\Leftrightarrow m_s$  em PG, com  $r = 1 + i$*

ou

*Se  $m_s$  em PG, com  $r = 1 + i \Leftrightarrow P_s$  constantes*

## Serviço de dívida constante

- Assim, podemos obter o valor de uma qualquer **parcela de reembolso** de capital a partir de **outra**:

$$P_{t+1} - P_t = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow 0 = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow m_{t+1} = m_t \times (1 + i)$$

- Ou, genericamente:

$$m_k = m_t \times (1 + i)^{k-t}$$

## Serviço de dívida constante

- A **soma** de parcelas de reembolso de capital em PG é dada por:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

- Ou, genericamente:

$$C_{t-1} = \sum_{k=t}^n m_k = m_t \times \frac{1 - r^{(n-t+1)}}{1 - r}$$

n.º de parcelas de reembolso

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a  $t$

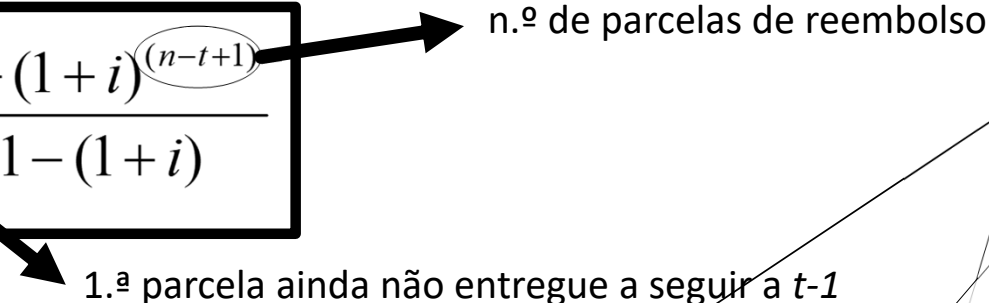
## Serviço de dívida constante

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital, **no serviço de dívida constante é  $1 + i$** :

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = m_1 \times \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

- Ou, genericamente:

$$C_{t-1} = \sum_{k=t}^n m_k = m_t \times \frac{1-(1+i)^{(n-t+1)}}{1-(1+i)}$$



n.º de parcelas de reembolso

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a  $t-1$

## Serviço de dívida constante

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital, no serviço de dívida constante é  $1 + i$ :

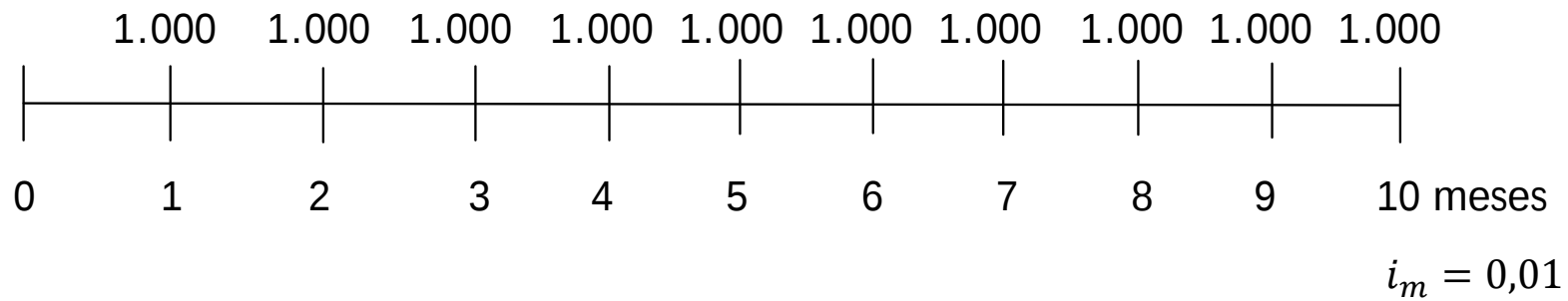
$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = m_1 \times \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

- Ou, genericamente:

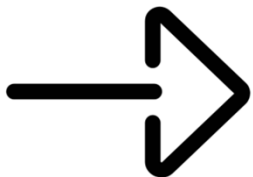
$$C_8 = \sum_{k=9}^{30} m_k = m_9 \times \frac{1-(1+i)^{(30-9+1)}}{1-(1+i)}$$

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a **8**

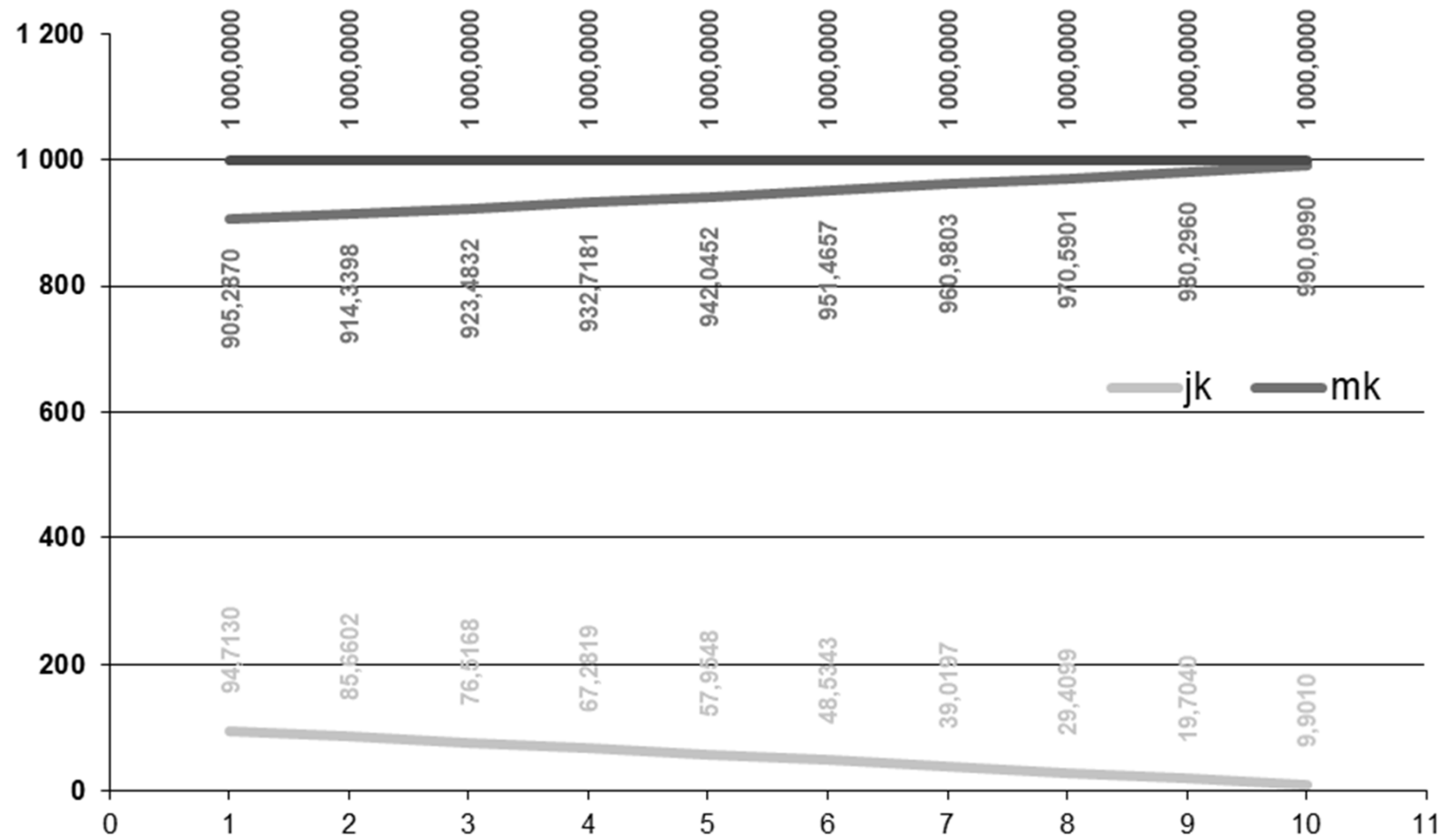
## EXEMPLO:



Capital em dívida logo após o 4.º pagamento?



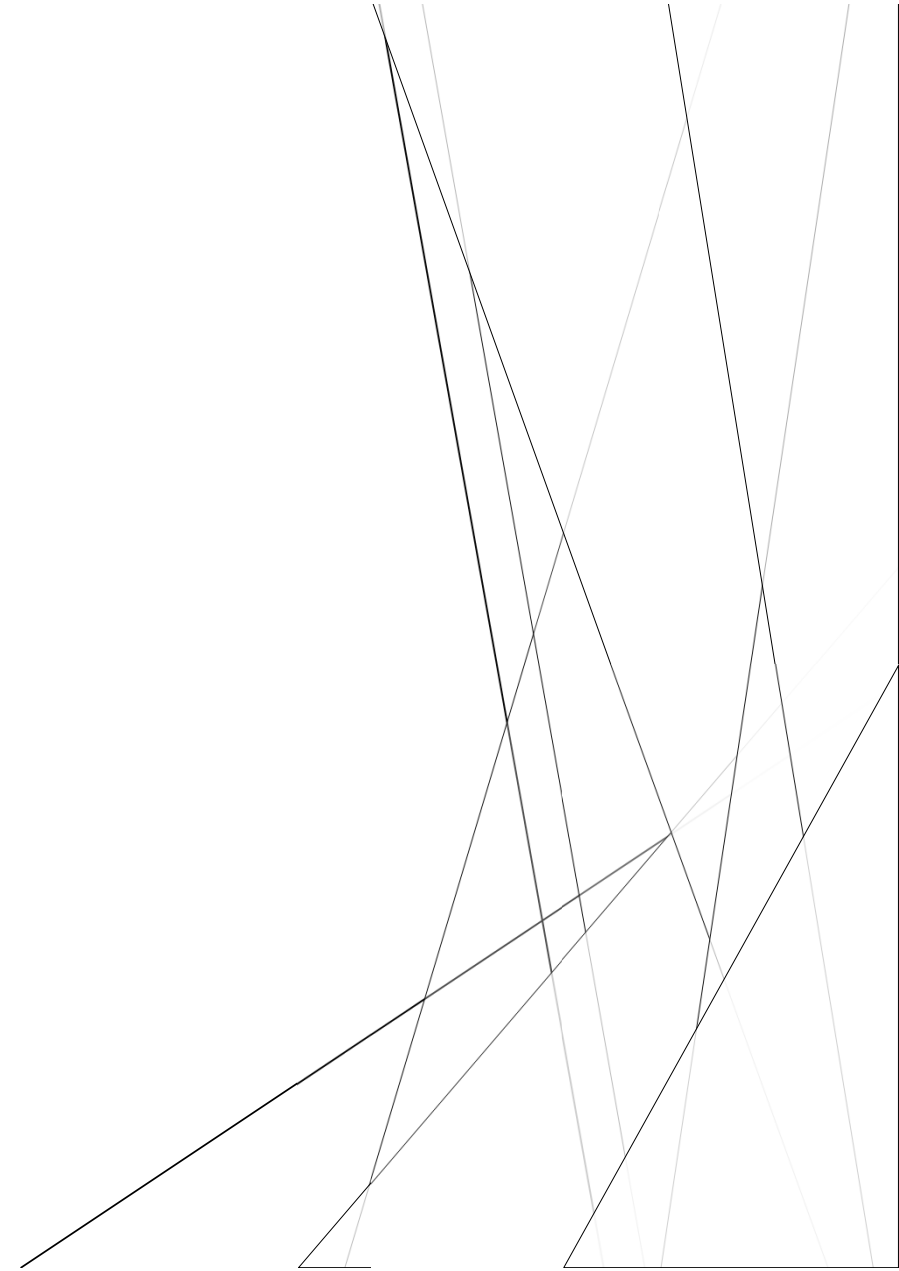
# EXEMPLO:



## Caso 1.2

Parcelas de reembolso  
constantes

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n$$



## Parcelas de reembolso constantes

- Quando as parcelas de reembolsos são constantes observa-se que tanto os **juros**, como os **pagamentos** têm um comportamento matemático intrínseco.
- Os juros e os pagamentos parcelas de reembolso de capital estão em **progressão aritmética**, de **razão**  $= -m \times i$  (*m constante*)

## Parcelas de reembolso constantes

- Ou seja:

*Se  $m_s$  constantes  $\Leftrightarrow j_s$  em  $PA$ , com  $r = -m \times i$*

*Se  $m_s$  constantes  $\Leftrightarrow P_s$  em  $PA$ , com  $r = -m \times i$*

ou

*$P_s$  ou  $j_s$  em  $PA$ , com  $r = -m \times i \Leftrightarrow m_s$  constantes*

## Parcelas de reembolso constantes

- Assim, podemos obter o valor de um qualquer **pagamento** a partir de **outro**:

$$P_{t+1} - P_t = m_{t+1} - m_t \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = m - m \times (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = m - m - m \times i$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} - P_t = -m \times i$$

$$\Leftrightarrow P_{t+1} = P_t - m \times i$$

## Parcelas de reembolso constantes

- Ou, genericamente:

$$P_k = P_t - m \times i \times (k - t)$$

- e

$$j_k = j_t - m \times i \times (k - t)$$

## Parcelas de reembolso constantes

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital são constantes:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times n$$

- Ou, genericamente:

$$C_{t-1} = \sum_{k=t}^n m_k = m_t \times (n - t + 1)$$

n.º de parcelas que falta entregar

1.ª parcela ainda não entregue a seguir a  $t-1$

## Parcelas de reembolso constantes

- Sabendo que a razão das parcelas de reembolso de capital são constantes:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 \times n$$

- Ou, genericamente:

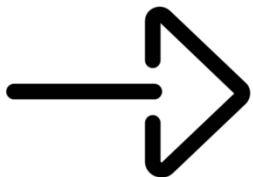
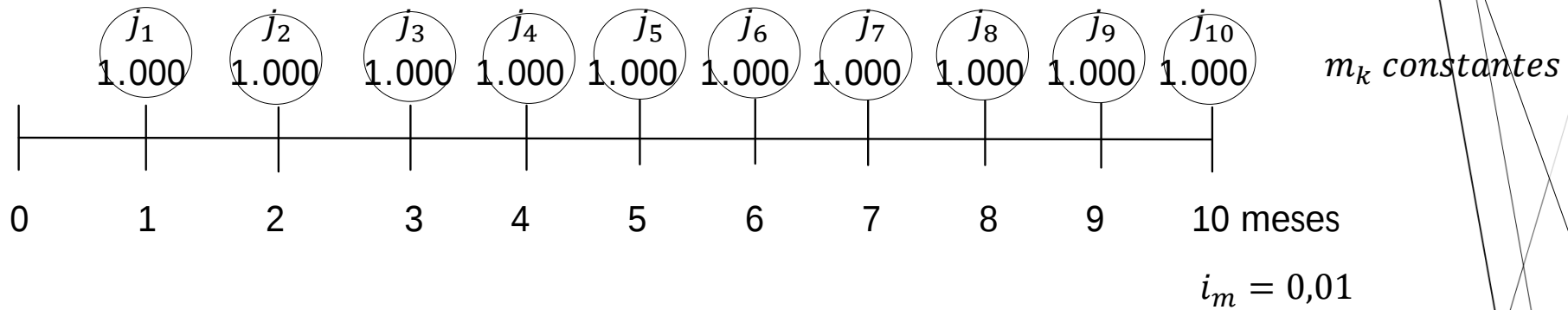
$$C_8 = \sum_{k=9}^{30} m_k = m_9 \times (30 - 9 + 1)$$

22

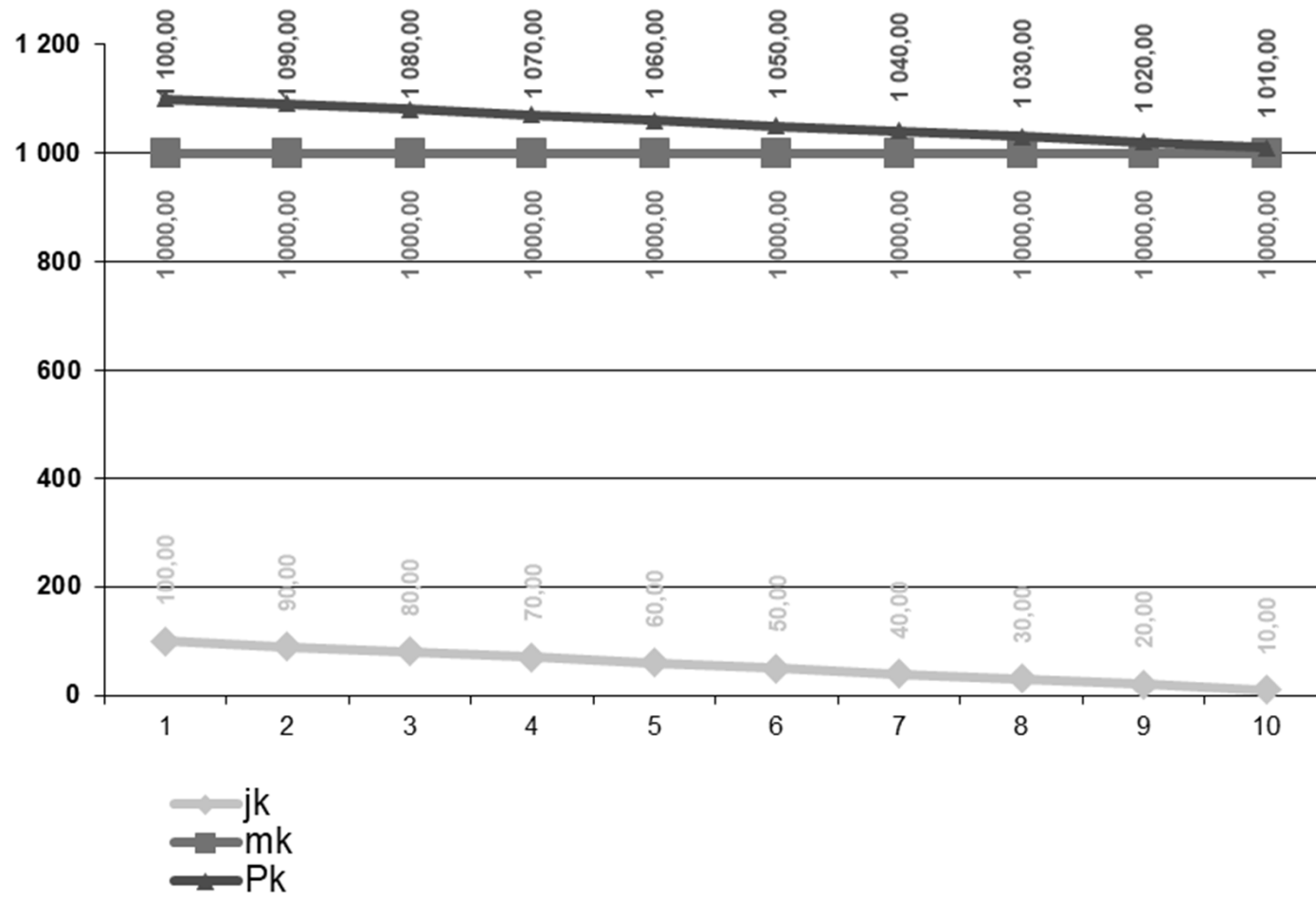
1.ª parcela ainda não entregue a seguir a 8

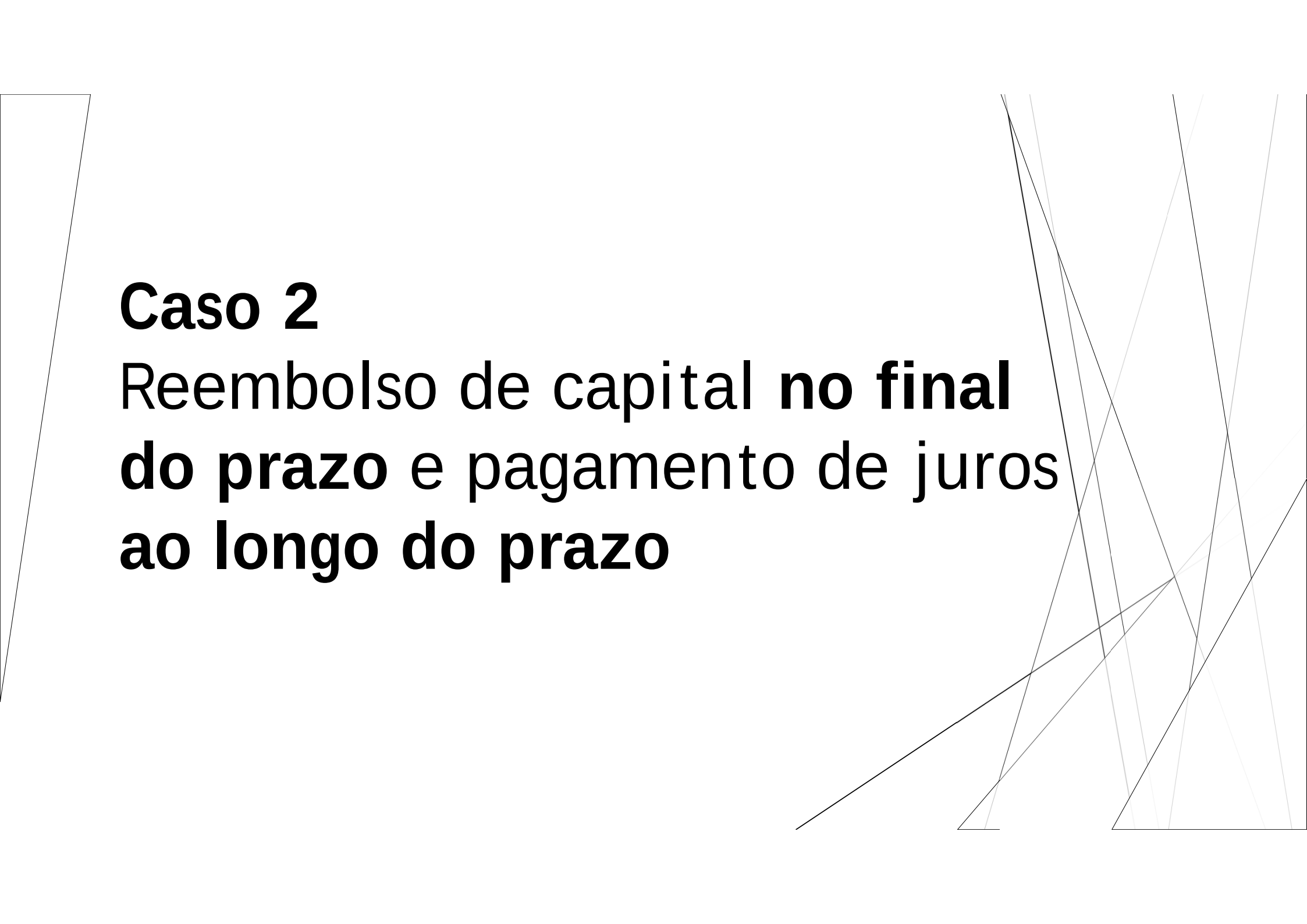
# EXEMPLO:

$$C_0 = \text{€}10.000$$



## EXEMPLO:



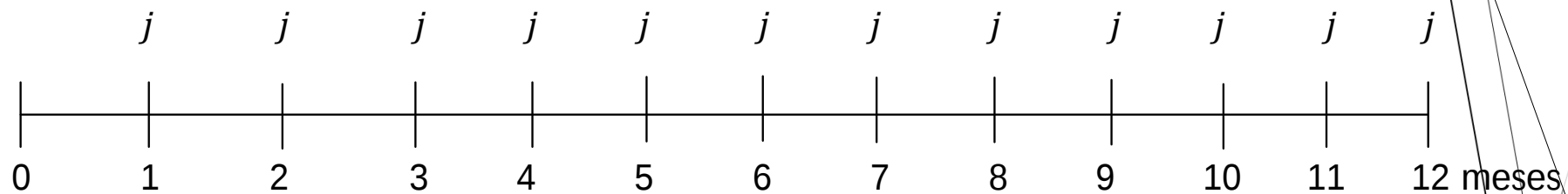
The background features several thin, light gray lines that intersect to form various geometric shapes, including triangles and polygons, primarily concentrated on the right side of the slide.

## **Caso 2**

**Reembolso de capital no final  
do prazo e pagamento de juros  
ao longo do prazo**

## EXEMPLO:

$$C_0 = \text{€}10.000$$

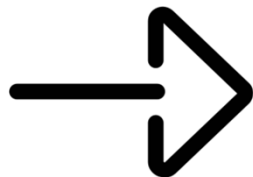


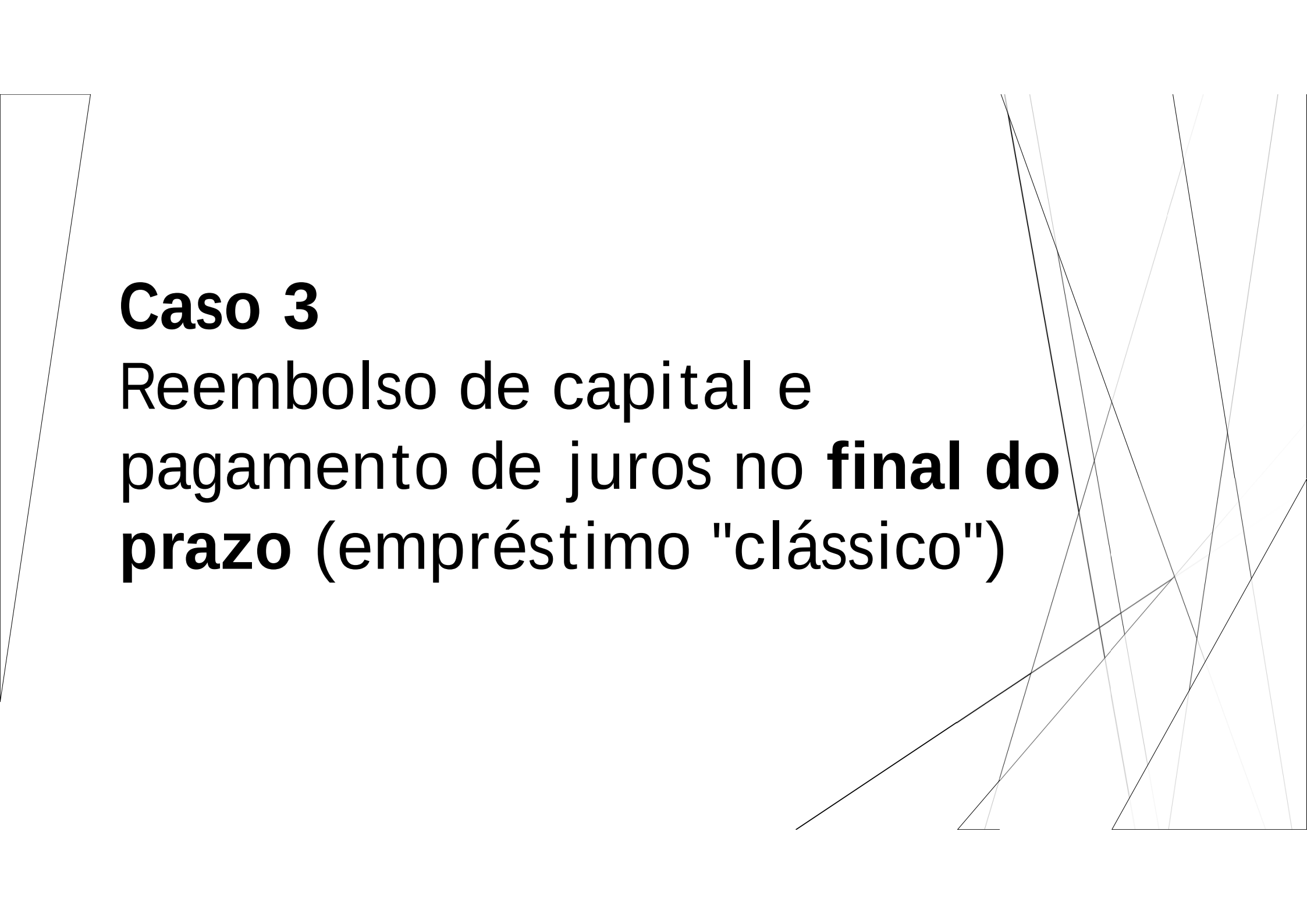
$$i_m = 0,01$$

**Valor do juro a entregar ao longo do tempo?**

$$\text{€}10.000 = \text{€}10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} + j \times a_{\overline{12}|0,01}$$

$$\Leftrightarrow j = \frac{\text{€}10.000 - \text{€}10.000 \times (1 + 0,01)^{-12}}{a_{\overline{12}|0,01}} = \text{€}100$$



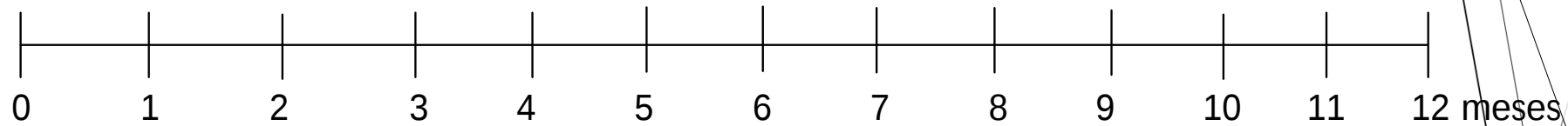
The background features several thin, light gray lines that intersect to form various geometric shapes, including triangles and polygons, creating a modern, abstract design.

## Caso 3

Reembolso de capital e  
pagamento de juros no **final do  
prazo** (empréstimo "clássico")

## EXEMPLO:

$$C_0 = \text{€}10.000$$

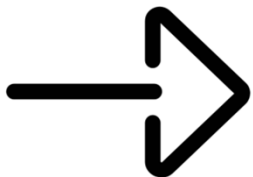


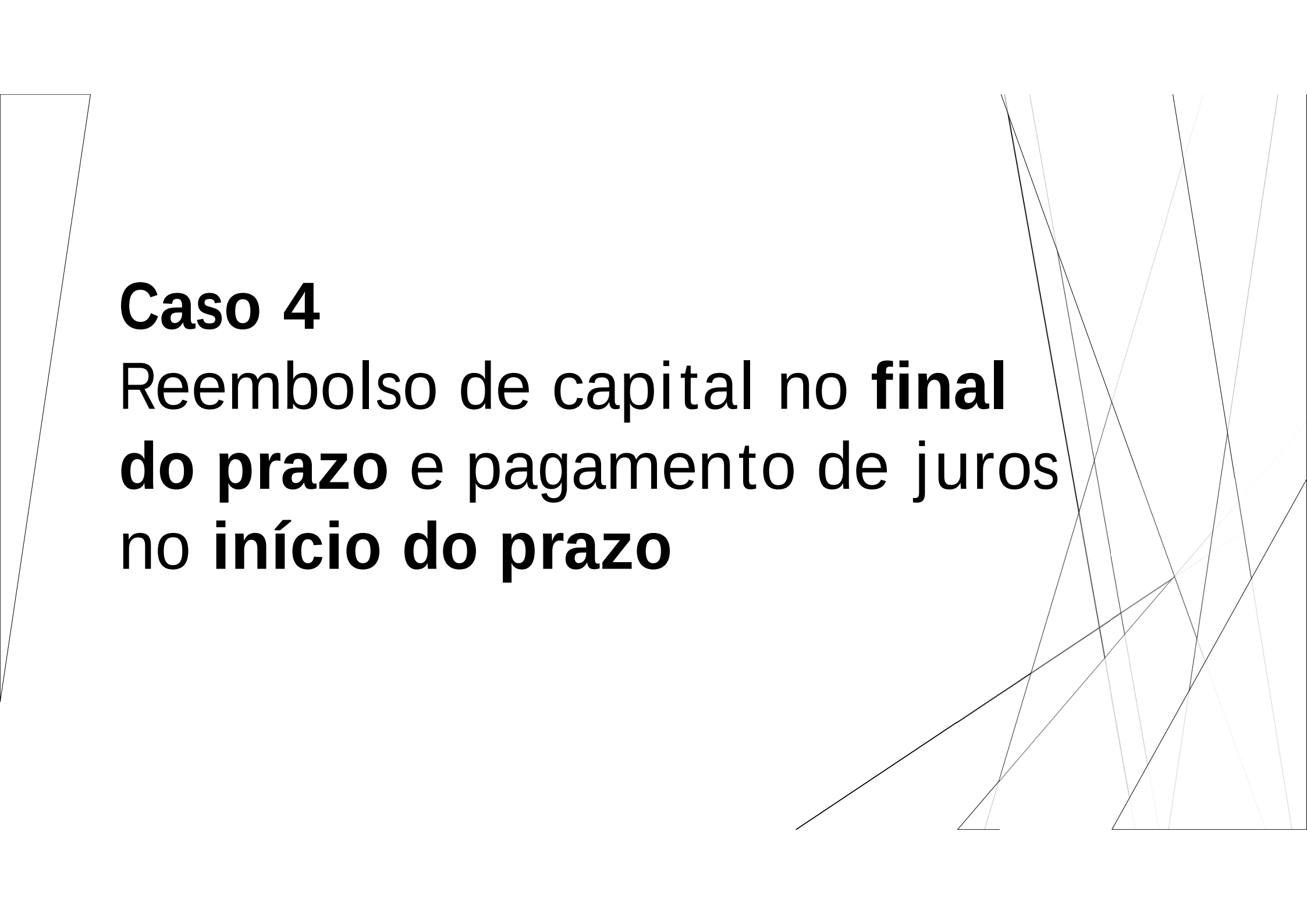
$$i_m = 0,01$$

**Valor do Juro no final do prazo?**

$$\text{€}10.000 = \text{€}10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} + J_{12} \times (1 + 0,01)^{-12}$$

$$\Leftrightarrow J_{12} = \frac{\text{€}10.000 - \text{€}10.000 \times (1 + 0,01)^{-12}}{(1 + 0,01)^{-12}} = \text{€}1.268,25$$



The background features several thin, light gray lines that intersect to form various geometric shapes, including triangles and polygons, primarily concentrated on the right side of the slide.

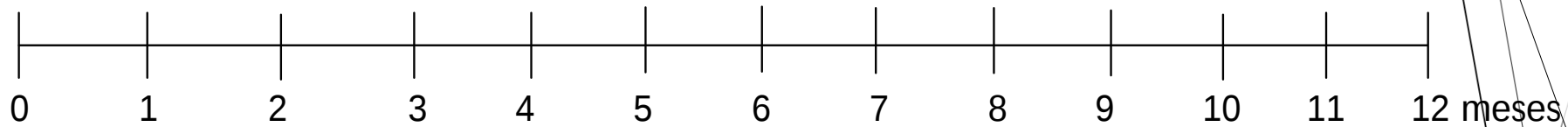
## Caso 4

Reembolso de capital no **final**  
do **prazo** e pagamento de juros  
no **início do prazo**

## EXEMPLO:

$$C_0 = \text{€}10.000$$

$J$

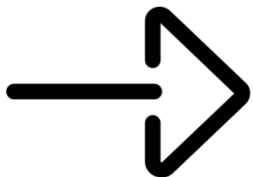


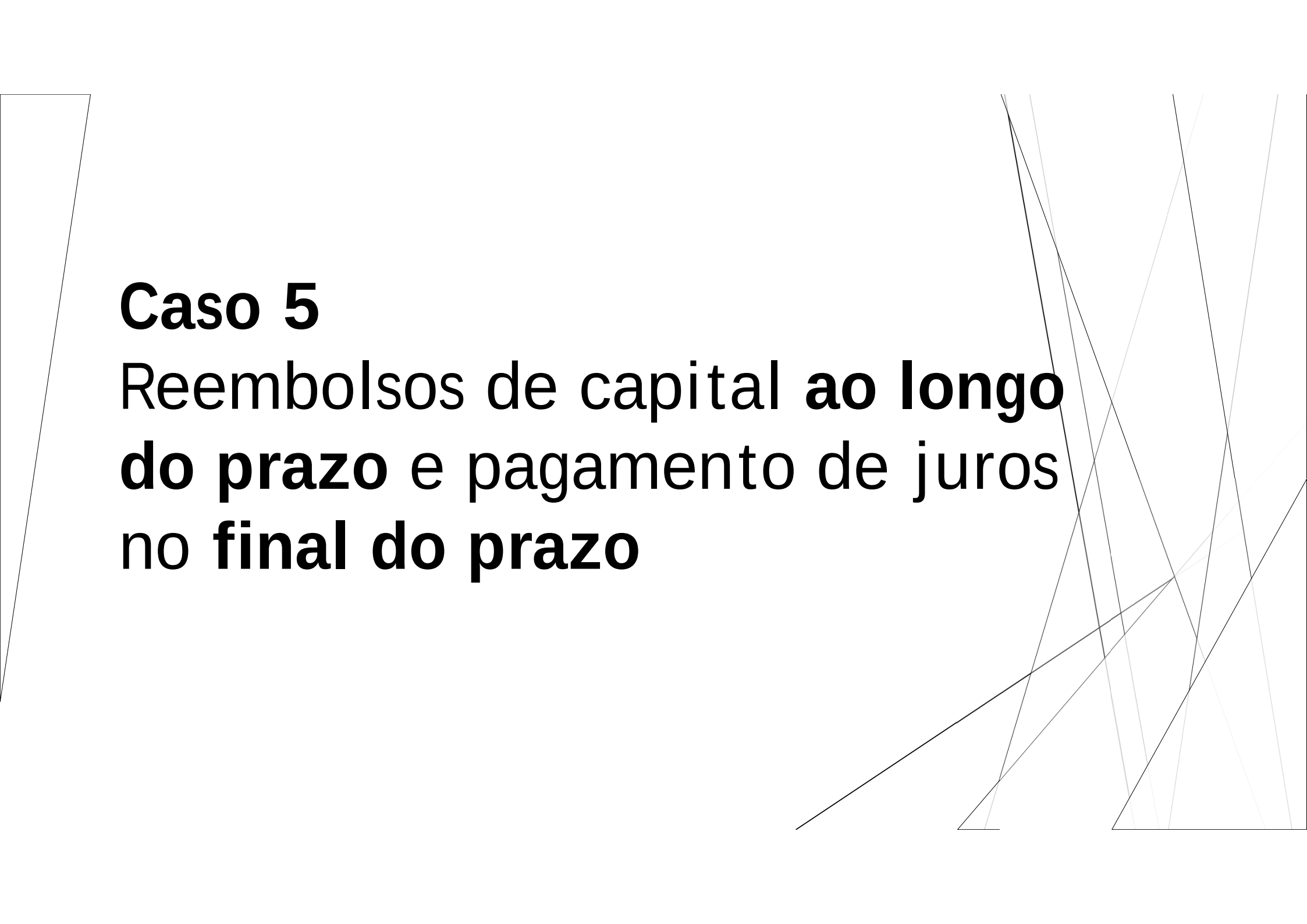
$$i_m = 0,01$$

**Valor do Juro no início do prazo?**

$$\text{€}10.000 = \text{€}10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} + J_0$$

$$\Leftrightarrow J_0 = \text{€}10.000 - \text{€}10.000 \times (1 + 0,01)^{-12} = \text{€}1.125,51$$



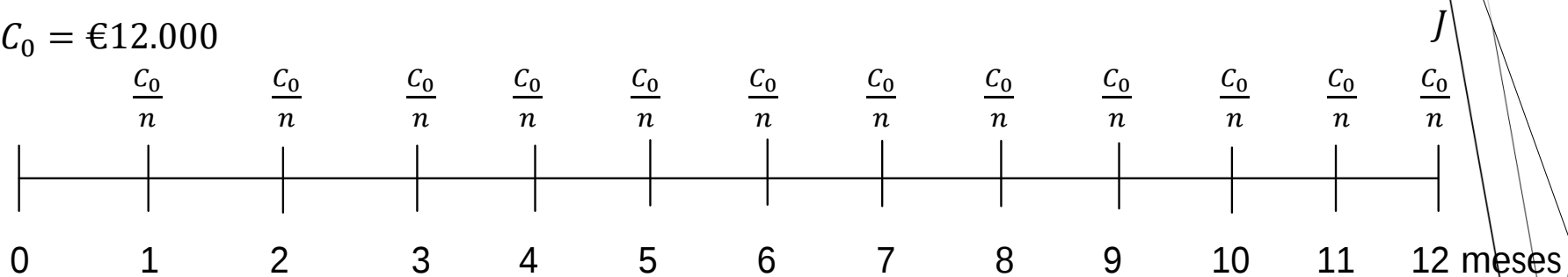
The background features several thin, light gray lines that intersect to form various geometric shapes, including triangles and polygons, primarily concentrated on the right side of the slide.

## **Caso 5**

**Reembolsos de capital ao longo  
do prazo e pagamento de juros  
no final do prazo**

## EXEMPLO:

$$C_0 = \text{€}12.000$$

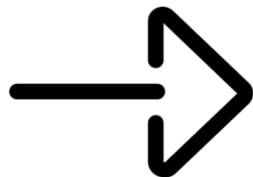


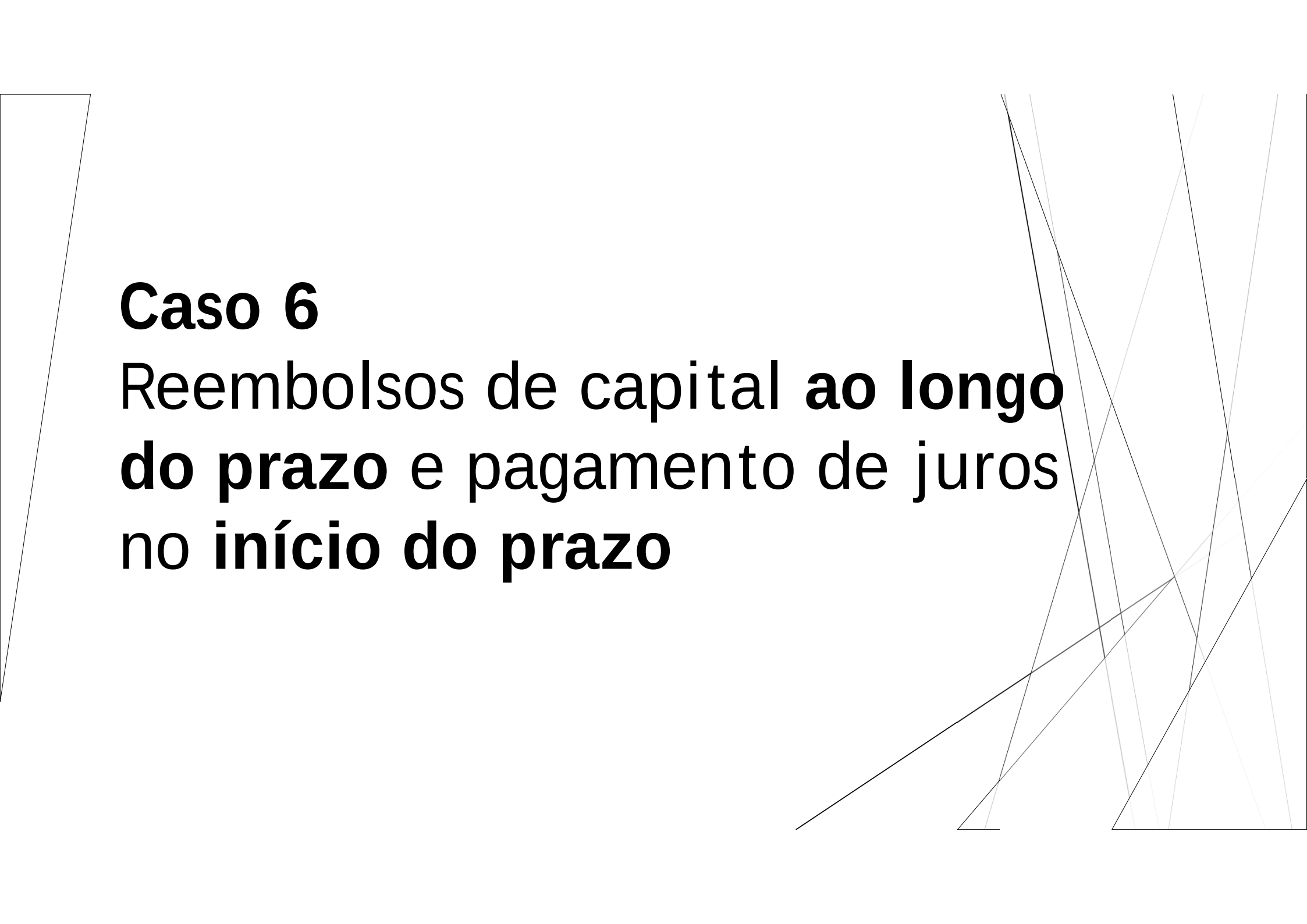
$$i_m = 0,01$$

**Valor do Juro no final do prazo?**

$$\text{€}12.000 = \frac{\text{€}12.000}{12} \times a_{\overline{12}|0,01} + J_n \times (1 + 0,01)^{-12}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{\text{€}12.000 - \text{€}1.000 \times a_{\overline{12}|0,01}}{(1 + 0,01)^{-12}} = \text{€}839,40$$



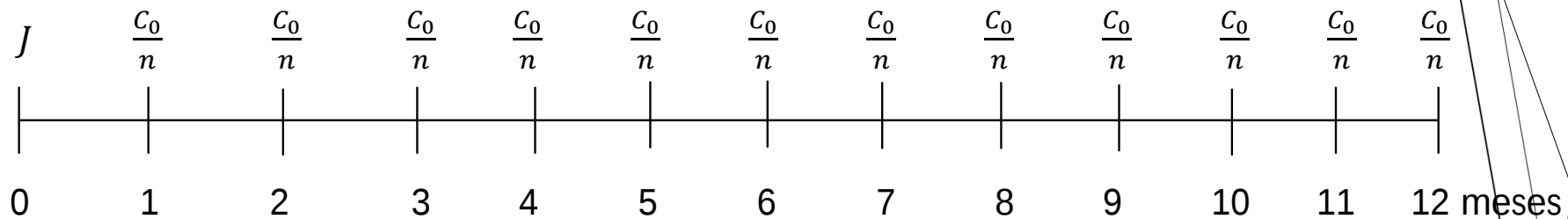
The background features several thin, light gray lines that intersect to form various geometric shapes, including triangles and polygons, primarily concentrated on the right side of the slide.

## **Caso 6**

**Reembolsos de capital ao longo  
do prazo e pagamento de juros  
no início do prazo**

## EXEMPLO:

$$C_0 = \text{€}12.000$$

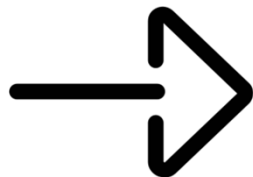


$$i_m = 0,01$$

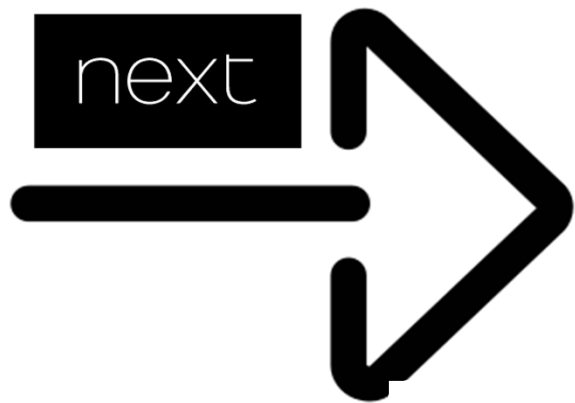
**Valor do Juro no início do prazo?**

$$\text{€}12.000 = \frac{\text{€}12.000}{12} \times a_{\overline{12}|0,01} + J_0$$

$$\Leftrightarrow J_0 = \text{€}12.000 - \text{€}1.000 \times a_{\overline{12}|0,01} = \text{€}744,92$$



**Aspetos práticos de:**



**Cálculo de capitais  
em dívida**



**Utilização de folha  
de cálculo**

Capítulo III – Serviço de dívida